Dr. Fried Katalin ■ Dr. Gerőcs László ■ Számadó László

MATEMATIKA 9.

A tankönyv feladatai és a feladatok megoldásai

A megoldások olvasásához Acrobat Reader program szükséges, amely ingyenesen letölthető az internetről (például: adobe.la.hu weboldalról).
A feladatokat fejezetenként külön-külön fájlba tettük. A fejezet címmel ellátott fájl tartalmazza a fejezet leckéinek végén kitűzött feladatok részletes megoldásait. A feladatokat nehézségük szerint jelöltük:
K1 = középszint, könnyebb; **K2** = középszint, nehezebb; **E1** = emelt szint, könnyebb; **E2** = emelt szint, nehezebb feladat.

Lektorok:
PÁLFALVI JÓZSEFNÉ
KONCZ LEVENTE

Tipográfia: LŐRINCZ ATTILA

Szakgrafika: DR. FRIED KATALIN

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80 200 788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: RE 16102
Felelős szerkesztő: Szloboda Tiborné
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné, Mikes Vivien
Terjedelem: 14,9 (A/5) ív
1. kiadás, 2010

Tartalom

Jelmagyarázat

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A C csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a B pont található: $ACB\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \frac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: ⊾

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2, b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$; $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$; $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaza a halmaznak: $\not\subset$; $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup, \cap$; $A \cup B$, $A \cap B$

Halmazok különbsége: $\setminus$; $A \setminus B$

Üres halmaz: $\emptyset$, $\{\ \}$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|$; $|\{0; 1; 2\}| = 3$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az x szám egész része, tört része: $[x]$, $\{x\}$; $[2{,}3] = 2$, $\{2{,}3\} = 0{,}3$

Az a osztója b-nek: $a \mid b$; $2 \mid 8$

Az a és b legnagyobb közös osztója: (a, b); $(4, 6) = 2$

Az a és b legkisebb közös többszöröse: $[a, b]$; $[4, 6] = 12$

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f\colon x \mapsto f(x)$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$ vagy $f(x) = y$; $f(x) = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

I. Halmazok

1. Halmazok, jelölések

1. K1 Döntsük el, hogy halmazt adtunk-e meg az alábbiakban!
a) A páros természetes számok.
b) A barátságos emberek.
c) A kerek számok.
d) A kis törtek.
e) Az 1-nél kisebb pozitív törtek.

Halmaz: a), e).

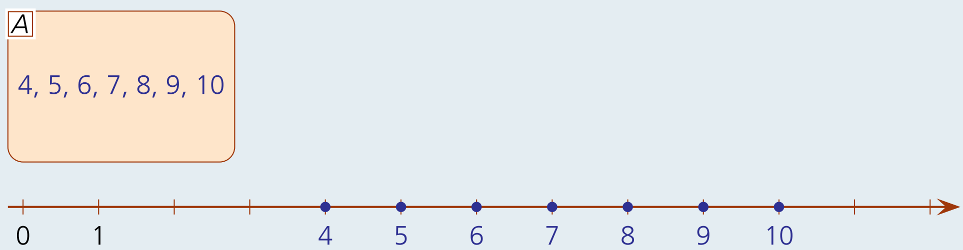
2. K1 Írjuk fel, hogy az alábbiak közül melyek az egyenlő halmazok!
A = {a pozitív egyjegyű páros számok};
B = {a nem 0 páros számjegyek};
C = {a páros számjegyek};
$D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
$E = \{2, 4, 6, 8\}$;
F = {2 egyjegyű többszörösei}.

$A = B = E, \qquad C = D = F.$

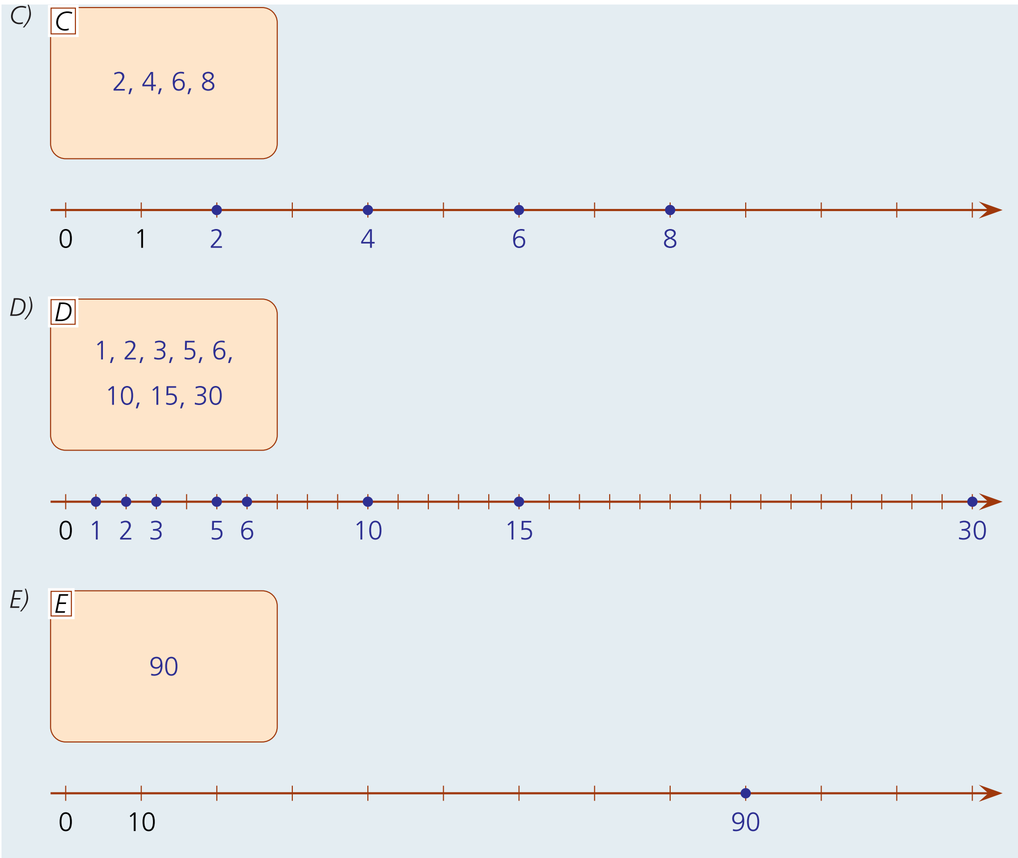
3. K1 *a)* Adjuk meg elemei felsorolásával a következő halmazokat!
A) a 3-nál nagyobb, 10-nél nem nagyobb egész számok;
B) a 0 többszörösei;
C) 2 egyjegyű pozitív többszörösei;
D) 30 pozitív osztói;
E) a 18 és a 30 legkisebb közös többszöröse.
b) Szemléltessük a fenti halmazokat kétféle módon!

a) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{0\}$; $C = \{2, 4, 6, 8\}$; $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; $E = \{90\}$.
b) Mindegyik halmazt szemléltethetjük Venn-diagramon és a számegyenes pontjaiként.

A)



B)



4. K1 Adjuk meg elemei egy közös tulajdonságával a következő halmazokat!

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$;
$C = \{3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots\}$; $D = \{0, 1\}$.

A = {a legfeljebb kétjegyű pozitív prímszámok}; *B* = {az 5 pozitív többszörösei};
C = {a 3 pozitív egész kitevőjű hatványai};
D = {a 0 és az 1} = {a 2-nél kisebb természetes számok}.

5. E1 Igazoljuk, hogy két racionális szám
a) összege; *b)* különbsége; *c)* szorzata; *d)* hányadosa (ha van)
is racionális szám!

A racionális számok minden esetben felírhatók két egész szám hányadosaként.

a) Az összeadáshoz közös nevezőre hozzuk a számokat. Továbbra is egész számok hányadosai lesznek. Az összeg nevezője a közös nevező (egész szám), a számláló a két számláló összege (egész számok összege egész szám). Ezért az összeg két egész szám hányadosa, vagyis racionális szám lesz.

b) Ugyanezzel a gondolattal oldható meg, csak a számláló a két számláló különbsége, de továbbra is egész szám lesz.

c) A szorzat számlálója a két szám számlálójának, a nevező a két szám nevezőjének a szorzata, tehát egész szám.

d) A hányados az osztandó és az osztó recioprokának (ha van) a szorzata, ami szintén racionális.

6. E2 Lehet-e egy racionális és egy irracionális szám
a) összege; *b)* különbsége; *c)* szorzata; *d)* hányadosa
racionális, illetve irracionális szám?

a) Irracionális biztosan lehet. Ha például a racionális tag 0, akkor *az összeg irracionális.* Ha az összeg racionális lenne, akkor a racionális tagot kivonva belőle – mivel a különbség szintén racionális –, a másik tag is racionális lenne. Ez az eset nem fordulhat elő. *Racionális tehát nem lehet.*

b) Írjuk fel a racionális szám kivonását az ellentett hozzáadásával. Ekkor ugyanazt kapjuk, mint az *a)* esetben: *mindig irracionális*.

c) Irracionális biztosan lehet. Ha például a racionális tényező 1, akkor *a szorzat irracionális.* Racionális is lehet, ha például a racionális tényező 0. Ekkor ugyanis *a szorzat racionális,* mert 0. Másképp azonban nem lehet racionális a szorzat, különben osztva a racionális tényezővel, racionális számot kapnánk, vagyis racionális lenne a másik tényező is.

d) Legyen a kérdéses hányados $\frac{a}{b}$. b nem lehet 0. Ha $a = 0$, akkor $0 = \frac{a}{b}$ is racionális.

Ha sem a, sem b nem 0 és b racionális, akkor $\frac{1}{b}$ is az, ha b irracionális, akkor $\frac{1}{b}$ is az. A *c)* feladat szerint akkor $a \cdot \frac{1}{b}$ irracionális.

A hányados csak abban az esetben lehet racionális, ha $a = 0$.

7. E2 Lehet-e két irracionális szám

a) összege; *b)* különbsége; *c)* szorzata; *d)* hányadosa

racionális, illetve irracionális szám?

a) Mindkettő lehet. $\pi + (-\pi) = 0$ racionális; $\pi + \pi = 2\pi$ irracionális.

b) Mindkettő lehet. $\pi - \pi = 0$ racionális; $\pi - (-\pi) = 2\pi$ irracionális.

c) Mindkettő lehet. $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ racionális; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ irracionális.

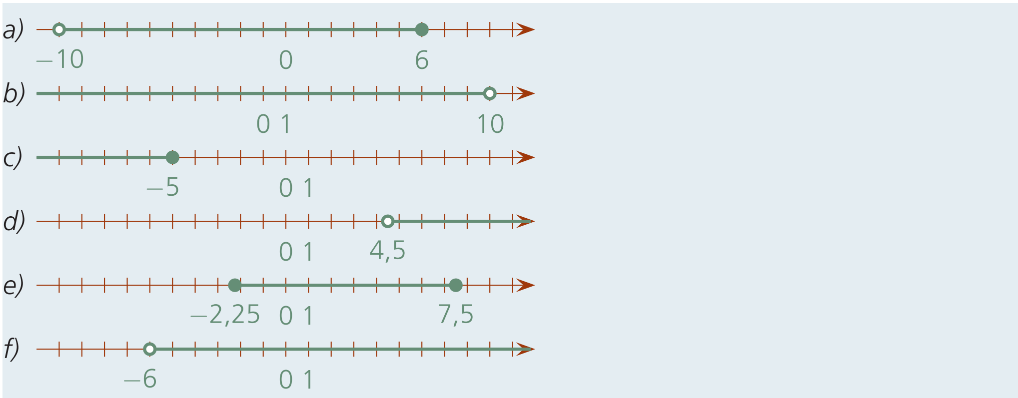
d) Mindkettő lehet. $\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$ racionális; $\sqrt{6} : \sqrt{2} = \sqrt{3}$ irracionális.

2. Speciális halmazok, intervallumok

1. K1 Ábrázoljuk számegyenesen a következő intervallumokat!

a) $]-10; 6]$; *b)* $]-\infty; 10[$; *c)* $]-\infty; -5]$;

d) $]4,5; \infty[$; *e)* $[-2,25; 7,5]$; *f)* $]-6; \infty[$.



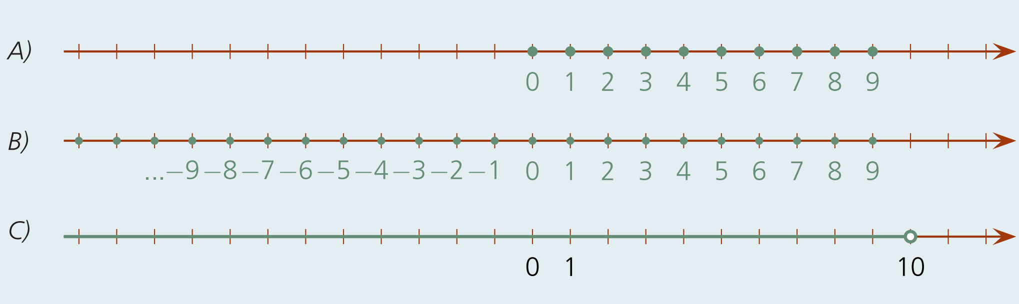
2. K1 Adjuk meg és szemléltessük a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát, ha az alaphalmaz *A)* a természetes számok; *B)* az egész számok; *C)* a nemnegatív valós számok halmaza!

a) $x < 10$; *b)* $-x > 5$; *c)* $|x| \geq 3$; *d)* $2x < 0$.

a) A természetes számok alaphalmazán a megoldáshalmaz $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

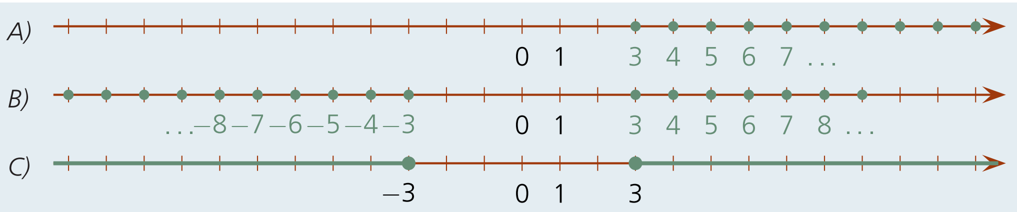
Az egész számok halmazán a $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A nemnegatív valós számok halmazán a $[0; 10[$ intervallum.

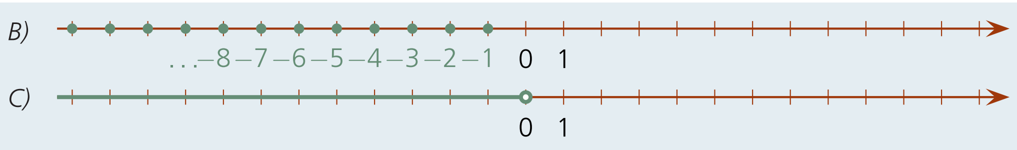


b) Ha $-x > 5$, akkor $x < -5$. [Mindkét oldalhoz hozzáadunk $(x - 5)$-öt.] Eszerint ha egy alaphalmazon van megoldása, az negatív.
A természetes számok halmazában nincs megoldása.
Az egész számok halmazán a megoldáshalmaz $\{\dots, -10, -9, -8, -7, -6\}$.
A nemnegatív valós számok halmazában sincs megoldása.

c) A természetes számok halmazán a megoldáshalmaz: $\{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$,
az egész számok halmazán $\{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, vagyis az egész számok halmazából elhagyva a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazt.
A valós számok halmazán a (-3)-nál kisebb vagy egyenlő, illetve a 3-nál nagyobb vagy egyenlő számok tartoznak a megoldáshalmazhoz.



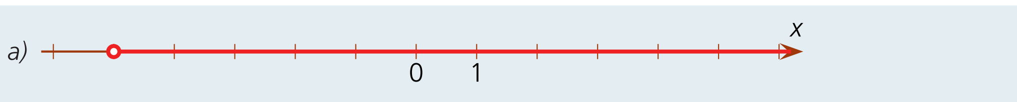
d) $x < 0$, a természetes számok halmazán nincs megoldás.
Az egész számok halmazában a 0-nál kisebb egész számok.
A valós számok halmazában a 0-nál kisebb valós számok.

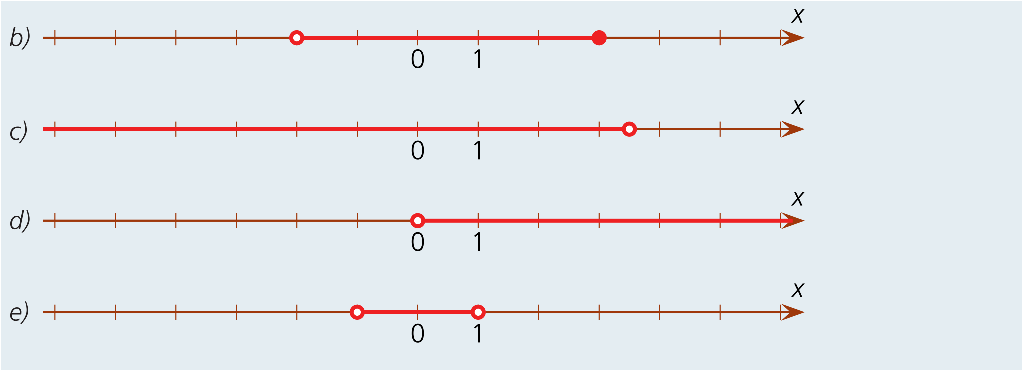


3. E1 Az alábbi egyenlőtlenségek alaphalmaza a valós számhalmaz. A megoldáshalmazokat írjuk olyan sorrendben, hogy mindegyik halmaz után következő halmaz részhalmaza legyen neki!
a) $x^2 > 5$; *b)* $x - 10 \geq 15$; *c)* $-x < -10$; *d)* $25 < x$; *e)* $|x| - 2 > 5$.

a) A megoldáshalmaz: $A = \{x > 5 \text{ vagy } x < -5\}$. *b)* A megoldáshalmaz: $B = \{x \geq 25\}$.
c) A megoldáshalmaz: $C = \{x > 10\}$. *d)* A megoldáshalmaz: $D = \{x > 25\}$.
e) A megoldáshalmaz: $E = \{x > 7 \text{ vagy } x < -7\}$.
Ha szemléltetjük a megoldáshalmazokat számegyenesen, akkor könnyen leolvashatjuk, hogy $A \supset E \supset C \supset B \supset D$.

4. K2 Írjuk fel az ábrával adott intervallumokat, illetve azt a halmazt, amely azon elemekből áll, amelyek nincsenek az adott halmazban!





A halmazok és párjaik:

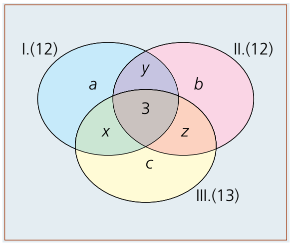
a) $x > -5$, illetve $x \le -5$;
b) $-2 < x \le 3$, illetve $\{x \le -2 \text{ vagy } x > 3\}$;
c) $x < 3{,}5$, illetve $x \ge 3{,}5$;
d) $x > 0$, illetve $x \le 0$;
e) $-1 < x < 1$, illetve $\{x \le -1 \text{ vagy } x \ge 1\}$.

3. Halmazok uniója, metszete

1. K1 Egy sporttagozatos osztály létszáma 24 fő. Az osztályban mindenki atletizál vagy kosárlabdázik. 16-an atletizálnak, 14-en kosaraznak. Hány olyan tanuló van az osztályban, aki csak kosarazik?

Ha x azoknak a száma, akik mindkét sportot űzik, akkor $16 + 14 - x = 24$, ahonnan $x = 6$. Így azok száma, akik csak kosaraznak: 8.

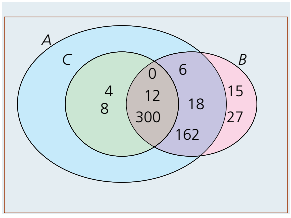
2. K1 Egy osztály minden tanulója elment a tanév három iskolai koncertjének valamelyikére. Az első koncerten 12-en voltak, a második koncerten ugyancsak 12-en vettek részt, a harmadik koncerten pedig 13-an. Mindhárom koncerten 3 diák vett részt. Azok száma, akik csak egy koncerten voltak: 14. Mennyi az osztálylétszám?



A feladat szövegének megfelelő halmazábra:
$a + b + c = 14.$
$12 + 12 + 13 - (x + y + z) - 6 = 14 + 3 + x + y + z.$
Innen $x + z + y = 7$.
Tehát az osztálylétszám: $14 + 7 + 3 = 24$.

3. K2 Legyen A halmaz a 2-vel, B halmaz a 3-mal, C halmaz a 4-gyel osztható számok halmaza. Készítsünk halmazábrát, és helyezzük el benne a következő számokat:
0, 4, 6, 8, 12, 15, 18, 27, 162, 300!

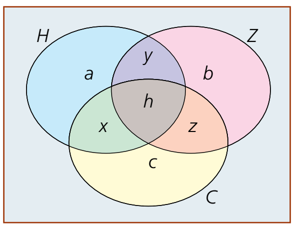
A megfelelő halmazábra és a megadott számok elhelyezése:



4. E1 Adjunk meg 5 halmazt úgy, hogy közülük bármely 4-nek a metszete ne legyen az üres halmaz, de az öt halmaz metszete az üres halmaz legyen!

Legyenek a, b, c, d, e különböző valós számok. A megfelelő halmazok:
$A = \{a, b, c, d\}$; $B\{a, b, c, e\}$; $C = \{a, b, d, e\}$; $D\{a, c, d, e\}$; $E = \{b, c, d, e\}$.

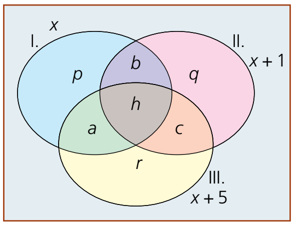
5. K2 Egy zeneiskola egyik évfolyamának 56 diákja hegedülni, zongorázni vagy csellózni tanul. (Mindenki játszik valamelyik hangszeren.) Azok száma, akik pontosan két hangszeren játszanak, négyszer, akik pedig pontosan egy hangszeren játszanak, kilencszer annyi, mint azok száma, akik mindhárom hangszeren játszanak. Hányan vannak azok, akik csak egy hangszeren játszanak?



Készítsünk egy halmazábrát!
A feltételek szerint
$a + b + c + x + y + z + h = 56, \quad x + y + z = 4h, \quad a + b + c = 9h.$

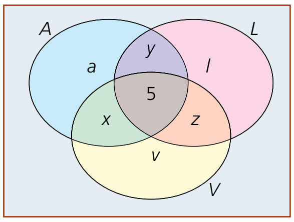
Ezek szerint $h + 4h + 9h = 56$, azaz $14h = 56$, ahonnan $h = 4$.
A csak egy hangszeren játszók száma: $a + b + c = 9h = 36$.

6. E1 Az iskolai túraszakosztály mind a 42 tagja részt vett az idei három túra valamelyikén. A második kiránduláson 1-gyel, a harmadikon pedig 5-tel többen vettek részt, mint az elsőn. Azok száma, akik két túrán vettek részt, 3-szor, akik pedig egy túrán vettek részt, 10-szer annyi, mint azok száma, akik mindhárom túrán részt vettek. Hányan vettek részt az első, a második, illetve a harmadik kiránduláson?



$a + b + c = 3h$, $p + q + r = 10h$, tehát $10h + 3h + h = 14h = 42$, azaz $h = 3$.
$x + x + 1 + x + 5 - (a + b + c) - 2h = 42$, azaz $3x = 51$, ahonnan $x = 17$.
Tehát az első, a második, illetve a harmadik túrán részt vevők száma rendre 17, 18, 22.

7. E1 Egy autójavító üzemben 49 szakmunkás dolgozik: autószerelők, lakatosok és autóvillamossági szerelők. 5 olyan szakmunkás van közöttük, aki mindhárom szakmában jártas. Azok az autószerelők, akik nem rendelkeznek a lakatos szakmával is, háromszor annyian vannak, mint akik csak a lakatos szakmával rendelkeznek. Hét olyan szakmunkás van az összes között, akik az autószerelő és a lakatos szakmát is tudják. Azok a villamossági szerelők, akik nem értenek az autószereléshez, 14-gyel kevesebben vannak, mint azok az autószerelők, akik nem értenek a lakatos munkához. Hányan vannak, akik csak a lakatos szakmával rendelkeznek?



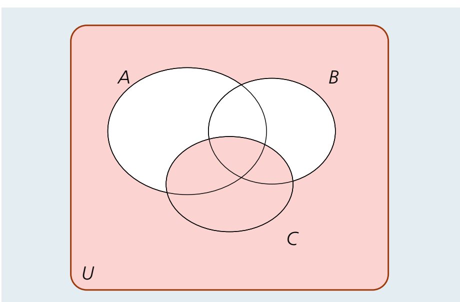
Készítsünk egy halmazábrát, és tüntessünk fel mindent, amit tudunk.
A feltételek szerint
$a + x = 3l, \quad y = 2, \quad v + z + 14 = a + x$.
Mivel $a + 2 + l + z + v + x + 5 = 49$, így
$3l + l + 3l - 14 + 7 = 49$, tehát $7l = 56$, ahonnan $l = 8$.
Vagyis a csak lakatos szakmával rendelkezők száma: 8.

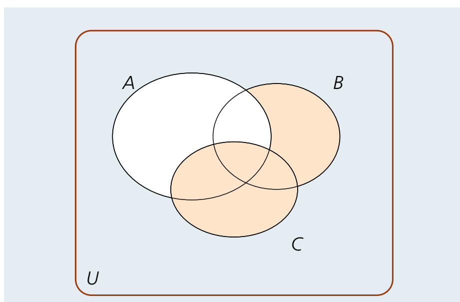
4. Halmazok különbsége, komplementer halmaz

1. K2 Legyenek az *A*, *B* és *C* halmazok rendre a 3-mal, 6-tal, illetve 5-tel osztható számok halmaza. Mely számok tartoznak az alábbi halmazokba?
a) $(A \setminus B) \cap C$; *b)* $A \setminus B \setminus C$.

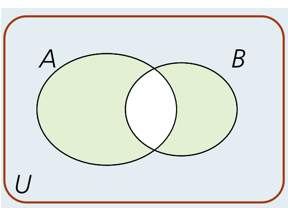
a) $(A \setminus B) \cap C =$ {a 15-tel osztható páratlan számok}.
b) $A \setminus B \setminus C =$ {a 3-mal osztható, de 5-tel nem osztható páratlan számok}.

2. E1 Adottak az *U* alaphalmazon az *A*, *B* és *C* halmazok. Szemléltessük egy halmazábrán az alábbi halmazokat!
a) $(\overline{A \cup B}) \cup C$; *b)* $(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup C$.

a)


b)


3. E1 Adottak az *U* alaphalmazon az *A* és *B* halmazok. Igazoljuk, hogy
$(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$!



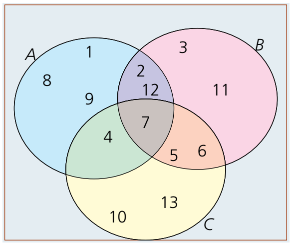
Az egyenlőség mindkét oldalának a bal oldali halmazábra felel meg.

4. K1 Írjuk fel az $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazok elemeit, ha
$A = \{a, b, c, g, h, j\}$; $B = \{a, c, f, h, k\}$!

$A \cup B = \{a, b, c, f, g, h, j, k\}$; $A \cap B = \{a, c, h\}$; $A \setminus B = \{b, g, j\}$.

5. K1 Adott három halmaz:
$A = \{1, 2, 4, 7, 8, 9, 12\}$; $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12\}$; $C = \{4, 5, 6, 7, 10, 13\}$.
Adjuk meg az alábbi halmazok elemeit!
a) $(A \cup B) \setminus C$; *b)* $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; *c)* $A \cap (B \setminus C)$.

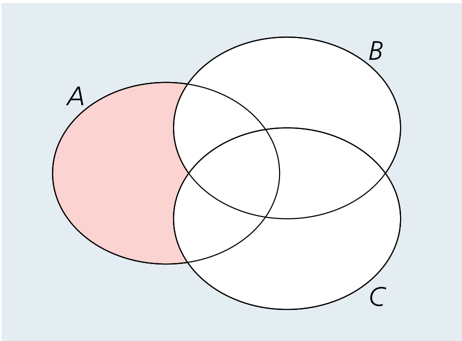
A könnyebb áttekinthetőség kedvéért először készítsünk halmazábrát, és írjuk be a megfelelő számokat a megfelelő helyre.



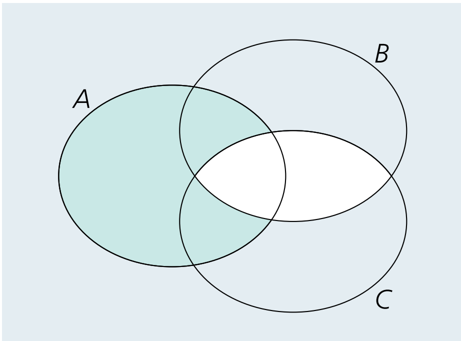
a) $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 8, 9, 11, 12\}$; *b)* $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 6, 7, 12\}$;
c) $A \cap (B \setminus C) = \{2, 12\}$.

6. K1 Igazoljuk halmazábrák segítségével az alábbi egyenlőségeket!
a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; *b)* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

a) Az egyenlőség mindkét oldala a következő ábrához vezet:

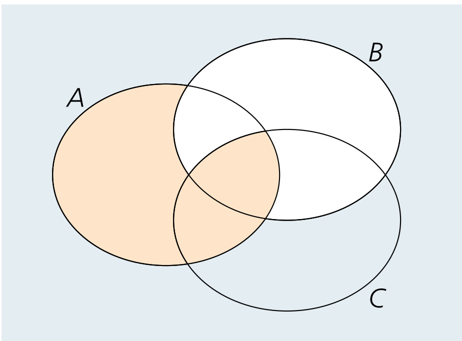


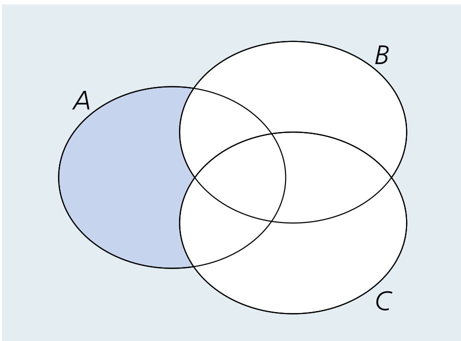
b) Az egyenlőség mindkét oldala a következő ábrához vezet:



7. K2 Igazoljuk, hogy nem minden esetben igaz az alábbi egyenlőség!
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Az egyenlőség mindkét oldalához ábrát készítünk, ami mutatja az állítást.

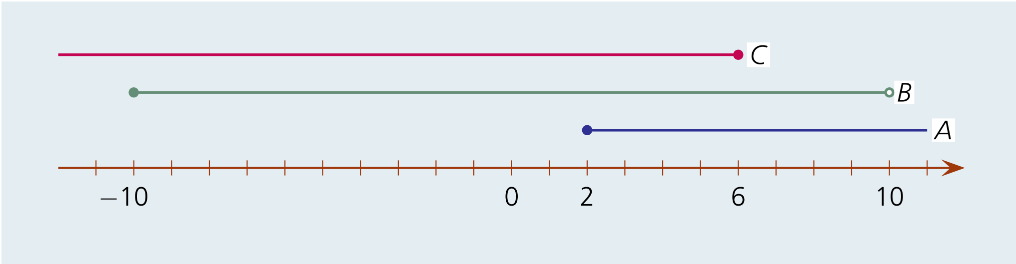




$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

8. K2 Legyen az alaphalmaz a valós számok halmaza. Az A halmaz az $x \geq 2$, a B halmaz az $|x| \leq 10$, a C halmaz az $x \leq 6$ valós számok halmaza. Határozzuk meg az alábbi halmazokat!
a) $\overline{A \cup B}$; *b)* $\overline{B \setminus A}$; c) $\overline{\overline{A} \cap \overline{C}}$.

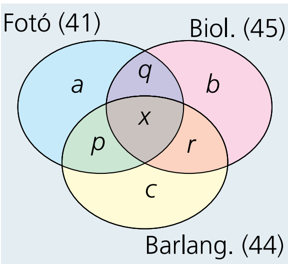
Szemléltessük az A, B, C halmazokat egy számegyenesen!



a) $\overline{A \cup B} = \{x < -10\}$; *b)* $\overline{B - A} = \{x < -10 \text{ vagy } 2 \le x\}$; *c)* $\overline{\overline{A} \cap \overline{C}} = R$.

9. E1 Egy általános iskola felső tagozatán háromféle szakkör működik: fotószakkör, biológiaszakkör és barlangász szakkör. E szakkörök létszámát a bal oldali ábra mutatja évfolyamokra lebontva. Azok száma, akik pontosan két szakkörre járnak, kétszer, akik pedig pontosan egy szakkörre járnak, háromszor annyi, mint azok száma, akik mindhárom szakkör munkájában részt vesznek. Az iskola felső tagozata 216 diákjának kb. hány százaléka nem jár semmilyen szakkörre?

	Fotó	Biológia	Barlangász
5. évf.	12	16	8
6. évf.	14	18	12
7. évf.	8	6	17
8. évf.	7	5	7



Fotószakkörre 41, biológiaszakkörre 45, barlangász szakkörre pedig 44 diák jár.
A feltételek szerint: $p + q + r = 2x$ és $a + b + c = 3x$.
Azoknak a diákoknak a száma, akik legalább egy szakkörre járnak: $6x$.
$41 + 45 + 44 - (p + q + r) - 2x = 130 - 4x$, vagyis
$130 - 4x = 6x$, ahonnan $x = 13$.
Tehát azoknak a diákoknak a száma, akik járnak legalább egy szakkörre, $6x = 78$. Ez az iskola 216 diákjának kb. $\frac{78}{216} \cdot 100 \approx 36{,}1\%$-a. Azok száma, akik semmilyen szakkörre nem járnak a felső tagozaton: $100\% - 36{,}1\% = 63{,}9\%$.

5. A matematikai logika elemei

1. K1 Írjuk fel a következő jelzők tagadását, valamint két különböző, jelentést kifejező ellenkezőjét!
a) szép; *b)* nagy; *c)* okos; *d)* vastag; *e)* kerek; *f)* homorú.

eredeti kifejezés	a tagadása	két különböző jelentésű ellenkezője	
a) szép	nem szép	csúnya	gyönyörű
b) nagy	nem nagy	kicsi	hatalmas
c) okos	nem okos	buta	zseniális
d) vastag	nem vastag	vékony	átlagos vastagságú
e) kerek	nem kerek	szögletes	ovális
f) homorú	nem homorú	domború	sík

2. K1 Írjuk fel a következő kijelentések tagadását! Döntsük el, hogy melyik igaz; az állítás vagy a tagadás!
a) Minden természetes szám nagyobb, mint 0.
b) Vannak páratlan egész számok.
c) Minden háromszögnek van legalább két hegyesszöge.
d) Minden tengelyesen szimmetrikus négyszögnek van két-két egyenlő szögpárja.
e) Van olyan síknégyszög, amelyben a derékszögek száma 3.
f) Bármely két nem párhuzamos egyenes metszi egymást.

a) Hamis. A tagadása: Van 0-nál nem nagyobb természetes szám. Igaz, például a 0.
b) Igaz. A tagadása: Nincsen páratlan egész szám. Hamis, például az 1.
c) Igaz. A tagadása: Van olyan síkbeli háromszög, amelynek nincs legalább két hegyesszöge (vagyis legfeljebb egy hegyesszöge van). Hamis.
d) Hamis (például egy olyan deltoid, amely nem rombusz). A tagadása: Van olyan szimmetrikus négyszög, amelynek nincs két-két egyenlő szögpárja. Igaz.
e) Hamis. A tagadása: Minden síknégyszögben a derékszögek száma 3-tól különböző (nem 3). Igaz, hiszen ha 3 derékszöge lenne, akkor 4 is lenne.
f) Nem igaz, mert lehetnek kitérő egyenespárok. A tagadása: Van olyan egyenespár, amely nem párhuzamos és nem is metsző. Igaz.

3. K2 Tételezzük fel, hogy igaz az az állítás, hogy „Ha füttyentesz, elhallgatok.”. Mi következik abból, hogy
a) nem hallgattam el; *b)* nem füttyentettél; *c)* elhallgattam; *d)* füttyentettél?

a) Nem füttyentettél, hiszen ha füttyentettél volna, elhallgattam volna.
b) Semmi. Lehet, hogy nem hallgattam el, de az is lehet, hogy csak úgy magamtól elhallgattam.
c) Semmi. Lehet, hogy füttyentettél, és azért, de az is lehet, hogy csak úgy magamtól elhallgattam.
d) Elhallgattam, hiszen ha füttyentesz, elhallgatok.

4. K2 Ha megnyitom a csapot, folyik a víz. Az alábbiak közül melyik állítás fejezi pontosan ugyanezt?
a) Ha nem nyitom meg a csapot, nem folyik a víz.
b) Ha folyik a víz, megnyitottam a csapot.
c) Ha nem folyik a víz, nem nyitottam meg a csapot.

A *c)*. Hiszen ha megnyitottam volna a csapot, akkor folyna a víz.

5. K1 Írjuk fel a következő állítások megfordítását!
a) Ha havazik, akkor fagy.
b) Ha péntek van, akkor moziba megyek.
c) Ha nincs kifogásod ellene, akkor ablakot nyitok.
d) Ha ráérsz, akkor eljöhetsz.

a) Ha fagy, akkor havazik.
b) Ha moziba megyek, akkor péntek van.
c) Ha ablakot nyitok, akkor nincs kifogásod ellene.
d) Ha eljöhetsz, akkor ráérsz.

6. K2 Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! Írjuk fel az állítások megfordítását, és azokról is döntsük el, hogy igazak-e!
a) Ha egy egész szám páros, akkor 2-esre végződik.
b) Ha egy egész szám osztható 9-cel, akkor a számjegyeinek az összege 9.
c) Ha egy háromszög derékszögű, akkor a két rövidebb oldalra emelt négyzet területösszege egyenlő a leghosszabb oldalra emelt négyzet területével.

a) Hamis. Megfordítva: Ha egy egész szám 2-esre végződik, akkor páros. Igaz.
b) Hamis. Megfordítva: Ha egy egész szám számjegyeinek az összege 9, akkor a szám osztható 9-cel. Igaz.
c) Igaz, ez a Pitagorasz-tétel. Megfordítva: Ha egy háromszögben a két rövidebb oldalra emelt négyzet területösszege egyenlő a leghosszabb oldalra emelt négyzet területével, akkor a háromszög derékszögű. Igaz, ez a Pitagorasz-tétel megfordítása. *Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a két rövidebb oldalra emelt négyzet területösszege egyenlő a leghosszabb oldalra emelt négyzet területével.*

II Algebra és számelmélet

1. A hatványozás és azonosságai

1. K1 Mivel egyenlő?

a) $1^5 = 1$; *b)* $5^1 = 5$; *c)* $0^2 = 0$;
d) $3^6 = 729$; *e)* $4^2 = 16$; *f)* $2^4 = 16$;
g) $7^2 = 49$; *h)* $6^3 = 216$; *i)* $3^4 = 81$;
j) $2^2 \cdot 3^2 = 36$; *k)* $6^2 \cdot 1^{10} = 36$; *l)* $1^{1000} = 1$.

2. K1 Mivel egyenlő?

a) $(-1)^3 = -1$; *b)* $(-2)^3 = -8$; *c)* $(-2)^4 = 16$;
d) $(-3)^6 = 729$; *e)* $4^3 = 64$; *f)* $(-3)^4 = 81$;
g) $(-5)^2 = 25$; *h)* $5^2 = 25$; *i)* $(-5)^3 = -125$;
j) $5^2 \cdot (-5)^2 = 625$; *k)* $(-2)^2 \cdot 0^4 = 0$; *l)* $(-1)^{100} = 1$.

3. K1 Írjuk fel hatvány alakban a következő számokat, ha lehet, többféleképpen is!

a) 1000 például: $= 10^3$; *b)* 1024 például: $= 2^{10} = 4^5 = 32^2$;
c) 81 például: $= 3^4 = 9^2$; *d)* 100 például: $= 10^2$;
e) 1 például: $= 1^2 = 1^0 = 2^0$; *f)* 625 például: $= 5^4 = 25^2$.

4. K1 Írjuk fel prímszámok hatványainak szorzataként a következő számokat!

a) $10 = 2^1 \cdot 5^1$; *b)* $12 = 2^2 \cdot 3^1$; *c)* $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$;
d) $36 = 2^2 \cdot 3^2$; *e)* $81 = 3^4$; *f)* $54 = 2^1 \cdot 3^3$;
g) $243 = 7^3$; *h)* $1024 = 2^{10}$; *i)* $2500 = 2^2 \cdot 5^4$;
j) $54 = 2 \cdot 3^3$; *k)* $160 = 2^5 \cdot 5$; *l)* $128 = 2^7$;
m) $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; *n)* $10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$; *o)* $64\,000 = 2^9 \cdot 5^3$.

5. K1 Mely számok prímtényezős alakját írtuk fel?

a) $2^3 = 8$; *b)* $3^3 = 27$; *c)* $2^2 \cdot 3^3 = 108$;
d) $4^2 = 16$; *e)* $2^3 \cdot 3^2 = 72$; *f)* $2^{11} = 2048$.

2. A hatványozás azonosságainak kiterjesztése

1. K1 Mely számokat írtuk hatványalakban?

a) 2^{-1}; *b)* $(-1)^{-1}$; *c)* 5^{-1}; *d)* $(-1)^5$;
e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; *f)* $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; *g)* $\frac{1}{3^{-1}}$; *h)* $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

a) $\frac{1}{2}$; *b)* -1; *c)* $\frac{1}{5}$; *d)* -1;
e) 5; *f)* -5; *g)* 3; *h)* $\frac{16}{9}$.

2. K1 Írjuk fel a megadott számokat hatványalakban, ha lehet, többféleképpen is!

a) 100; *b)* 0,1; *c)* 0,25; *d)* 1;

e) 0,01; *f)* $\frac{1}{81}$; *g)* 0,0001; *h)* 0,001.

Például: *a)* $100 = 100^1 = 10^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$; *b)* $0{,}1 = 10^{-1}$;

c) $0{,}25 = 0{,}5^2 = 2^{-2}$; *d)* $1 = 1^2 = 1^{-10}$; *e)* $0{,}01 = 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$;

f) $\frac{1}{81} = 3^{-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^2$; *g)* $0{,}0001 = 10^{-4} = 0{,}01^2$; *h)* $0{,}0001 = 0{,}1^3 = 10^{-3}$.

3. K1 Számítsuk ki a szorzások eredményét!

a) $2^7 \cdot 2^{-4}$; *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^4$; *c)* $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 2^4$; *d)* $4^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$;

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$; *f)* $5^{-2} \cdot 2^{-5}$; *g)* $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot 5^2$; *h)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot 2^4$.

a) 8; *b)* 4; *c)* $\frac{16}{81}$; *d)* 1;

e) $\frac{256}{81}$; *f)* $\frac{1}{800}$; *g)* $\frac{625}{4}$; *h)* 81.

4. K1 Számítsuk ki a műveletek eredményét!

a) $4^{-2} : 3^{-2}$; *b)* $1^{-1} : 5^{-1}$; *c)* $4^3 \cdot 3^3$; *d)* $(-2)^{-2} : 2^2$;

e) $(-2)^{-1} : (-1)^{-2}$; *f)* $2^{-4} : (-2)^4$; *g)* $7^{-6} \cdot 7^6$; *h)* $7^{-5} : \left(\frac{1}{7}\right)^5$.

a) $\frac{9}{16}$; *b)* 5; *c)* 1728; *d)* $\frac{1}{16}$;

e) $\frac{1}{-2}$; *f)* $\frac{1}{256}$; *g)* 1; *h)* 1.

5. K1 Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

$a = 3^{-1}$; $b = (-1)^{-3}$; $c = 3^1$; $d = (-1)^3$; $e = 1^{-3}$; $f = (-3)^1$; $g = 1^3$; $h = (-3)^{-1}$.

$a = \frac{1}{3}$; $b = -1$; $c = 3$; $d = -1$; $e = 1$; $f = -3$; $g = 1$; $h = -\frac{1}{3}$.

Eszerint: $f < b = d < h < a < e = g < c$.

3. Gyakorlati számítások

1. K1 Fejezzük ki a következő számokat normálalakban!

a) 6 000 000; *b)* 125 000; *c)* 1560; *d)* 4 540 000;

e) 0,1; *f)* 1,5; *g)* 0,000 05; *h)* 10 000,000 01.

a) $6 \cdot 10^6$; *b)* $1{,}25 \cdot 10^5$; *c)* $1{,}56 \cdot 10^3$; *d)* $4{,}54 \cdot 10^6$;

e) $1 \cdot 10^{-1}$; *f)* $1{,}5 \cdot 10^0$; *g)* $5 \cdot 10^6$; *h)* $1{,}000\,000\,001 \cdot 10^4$.

2. K1 Mennyi

a) a 20 15%-a; *b)* a 15 20%-a; *c)* a 10 5%-a; *d)* az 5 10%-a?

a) 3; *b)* 3; *c)* 0,5; *d)* 0,5.

3. K1 Mennyi

a) egy szám 20%-ának 120%-a; *b)* egy szám 80%-ának 120%-a;
c) egy szám 125%-ának 80%-a; *d)* egy szám 180%-ának a 10%-a?

a) A szám 24%-a; *b)* a szám 96%-a;
c) a szám 100%-a, azaz maga a szám; *d)* a szám 18%-a.

4. K1 Melyik szám 45%-a

a) a 10; *b)* a 45; *c)* a 135; *d)* az 1,5?

a) $22,\dot{2} = \frac{200}{9}$; *b)* 100; *c)* 300; *d)* $3,\dot{3} = \frac{10}{3}$.

5. K1 Tekintsük a Földet egy olyan gömbnek, amelynek a középpontján átmenő körök kerülete 40 000 km!

a) Megközelítőleg mekkora a Föld átmérője?
b) Megközelítőleg mekkora a Föld sugara?
c) Megközelítőleg mekkora a Föld térfogata?
d) Megközelítőleg mekkora a Föld felszíne?
e) A Föld felszínének körülbelül hány százalékát borítja víz, ha az összes vízfelület nagysága körülbelül $3,4 \cdot 10^8$ km^2?

(Emlékeztetőül: Az r sugarú kör kerülete $2r\pi$, területe $r^2\pi$. Az r sugarú gömb felszíne $4r^2\pi$, térfogata $\frac{4}{3}r^3\pi$.)

a) $d \approx 1,27 \cdot 10^4$ km. *b)* $r \approx 6,4 \cdot 10^3$ km. *c)* $V \approx 1,1 \cdot 10^{12}$ km^3.
d) $A \approx 5,1 \cdot 10^8$ km^2. *e)* Kb. 67%-át.

6. K1 *a)* Hány százaléka a Föld átmérője a Napénak?
b) Hány százaléka a Föld tömege a Napénak?
A szükséges adatok megtalálhatók a négyjegyű függvénytáblázatban.

a) A Nap átmérője: $1,4 \cdot 10^6$ km; a Föld átmérője: $1,27 \cdot 10^4$ km.
A kettő aránya: $\frac{1,4 \cdot 10^6}{1,27 \cdot 10^4} \approx 1,1 \cdot 10$. Vagyis a Föld átmérője a Nap átmérőjének 1,1%-a.
b) A Föld tömege: $6 \cdot 10^{24}$ kg, a Nap tömege: $2 \cdot 10^{30}$ kg.
A kettő aránya: $\frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{30}} = 3 \cdot 10^{-6}$. $2 \cdot 10^{-4}$ százaléka. Ez 0,0002%.

4. Algebrai kifejezések összevonása, szorzása

1. K1 Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $4a^5c^3 \cdot 5a^2bc^4$; *b)* $\frac{1}{3}x^4y^2z^3 \cdot \frac{3}{4}xy^3z^5$; *c)* $\frac{5}{7}p^3q^3s \cdot \left(-\frac{14}{3}pq^4s^6\right)$.

a) $20a^7bc^7$; *b)* $\frac{1}{4}x^5y^5z^8$; *c)* $-\frac{10}{3}p^4q^7s^7$.

2. K1 Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $(2x+3y)(3x^2-5xy-6y^2)$; *b)* $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}a^2b\right)\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{2}{3}ab^2-\frac{4}{3}a^2b\right)$.

a) $6x^3-10x^2y-12xy^2+9x^2y-15xy^2-18y^3 = 6x^3-x^2y-27xy^2-18y^3$;
b) $\frac{1}{3}a^4+\frac{4}{9}a^2b^2-\frac{8}{9}a^3b-\frac{3}{8}a^5b-\frac{1}{2}a^3b^3+a^4b^2$.

3. K1 Végezzük el az alábbi szorzást!
$(a-1)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)$.

$a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6-1-a-a^2-a^3-a^4-a^5=a^6-1$.

4. K1 Végezzük el az alábbi szorzásokat!
a) $\frac{2}{3}x^4a^2\cdot\frac{3}{4}xa^3$; b) $\frac{1}{2}p^4q^3\cdot(-6pq^5)$; c) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)\cdot\left(\frac{3}{8}x^3y^3\right)$.

a) $\frac{1}{2}x^5a^5$; b) $-3p^5q^8$; c) $-\frac{1}{4}x^4y^5$.

5. K2 A következő feladatokban egy többtagú összeget kell szoroznunk egy taggal.
a) $2x^2(x^3-3x^2+4x)$; b) $6ab(2ab^2+3ab-4a^2b)$; c) $\frac{3}{5}x^3y^2\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{5}{9}xy^2+\frac{10}{3}x^2y^3\right)$.

a) $2x^5-6x^4+8x^3$; b) $12a^2b^3+18a^2b^2-24a^3b^2$; c) $\frac{3}{10}x^5y^3-\frac{1}{3}x^4y^4+2x^5y^5$.

6. E1 A következő feladatokban egy többtagú összeget kell szoroznunk egy taggal.
a) $4x^ny^k(3x^2y-2x^ky^n+5xy)$; b) $\frac{1}{3}q^mp^{2n}\left(\frac{3}{2}q^np^{2m}-\frac{2}{3}q^{m-1}p^{n+1}+\frac{4}{5}q^{m+n}p^{m-n}\right)$.

a) $12x^{n+2}y^{k+1}-8x^{n+k}y^{n+k}+20x^{n+1}y^{k+1}$; b) $\frac{1}{2}q^{m+n}p^{2n+2m}-\frac{2}{9}q^{2m-1}p^{3n+1}+\frac{4}{15}q^{2m+n}p^{m+n}$.

7. K1 Az alábbi feladatokban több tagot kell több taggal szoroznunk.
a) $(a+2x)(a-2x)$; b) $(y-2)(y^2-2xy+y)$; c) $(1-x)(x^3-3x^2+x+1)$.

a) a^2-4x^2; b) $y^3-2xy^2+y^2-2y^2+4xy-2y=y^3-2xy^2-y^2+4xy-2y$;
c) $x^3-3x^2+x+1-x^4+3x^3-x^2-x=-x^4+4x^3-4x^2+1$.

8. E1 Az alábbi feladatokban több tagot kell több taggal szoroznunk.
a) $(x^n+y^k)(1+x+y)$; b) $(p^{n+1}-q^k)(p+q+pq)$;
c) $\left(\frac{1}{2}x^k+\frac{2}{3}y^{k+1}\right)\left(2x^{1-k}-\frac{3}{2}x^ky^k+\frac{1}{6}y^{k-1}\right)$.

a) $x^n+x^{n+1}+x^ny+y^k+xy^k+y^{k+1}$; b) $p^{n+2}+p^{n+1}q+p^{n+2}q-pq^k-q^{k+1}-pq^{k+1}$;
c) $x-\frac{3}{4}x^{2k}y^k+\frac{1}{12}x^ky^{k-1}+\frac{4}{3}x^{1-k}y^{1+k}-x^ky^{2k+1}+\frac{1}{9}y^{2k}$.

5. Nevezetes szorzatok

1. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!
a) $(5x-3y)^2$; b) $(2a^2b+4ab^2)^2$; c) $(5x^3y-2xy)^2$.

a) $25x^2-30xy+9y^2$; b) $4a^4b^2+16a^3b^3+16a^2b^4$; c) $25x^6y^2-20x^4y^2+4x^2y^2$.

2. K1 Alakítsuk szorzattá az alábbi kéttagú összegeket!
a) $49b^6-121x^2$; b) $36a^4b^2-64a^2b^4$; c) $\frac{1}{16}p^6x^4-\frac{4}{25}a^2b^8$.

a) $(7b^3+11x)(7b^3-11x)$; b) $(6a^2b+8ab^2)(6a^2b-8ab^2)$;
c) $\left(\frac{1}{4}p^3x^2+\frac{2}{5}ab^4\right)\left(\frac{1}{4}p^3x^2-\frac{2}{5}ab^4\right)$.

3. K1 Elvégeztük egy kéttagú összeg négyzetre emelését, és eredményül azt kaptuk:
$(..................)^2 = 4a^2 - 12ab + ...$
Sajnos az utolsó tag elmosódott a papíron. Milyen összeget emeltünk négyzetre?

$(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$ vagy $(-2a + 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$.

4. K2 Számítsuk ki az alábbi kéttagú összegek köbét!
a) $(a^2 + 3a)^3$; *b)* $(2x - y)^3$; *c)* $\left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}n^2k\right)^3$.

a) $a^6 + 9a^5 + 27a^4 + 27a^3$; *b)* $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$;
c) $\frac{1}{8}k^6 - \frac{9}{8}k^5n^2 + \frac{27}{8}n^4k^4 - \frac{27}{8}n^6k^3$.

5. K1 Két tag összegének, illetve különbségének a négyzetéről tanultak alapján végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!
a) $(2x - 3y)^2$; *b)* $(a^2 - 4b)^2$; *c)* $(4p + 3q)^2$.

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2$; *b)* $a^4 - 8a^2b + 16b^2$; *c)* $16p^2 + 24pq + 9q^2$.

6. K1 Végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!
a) $(x^2 - x)^2$; *b)* $(2y^3 + 3y)^2$; *c)* $(4a^2 + 3ab)^2$.

a) $x^4 - 2x^3 + x^2$; *b)* $4y^6 + 12y^4 + 9y^2$; *c)* $16a^4 + 24a^3b + 9a^2b^2$.

7. K1 Két tag összegének, illetve különbségének a szorzatáról tanultak alapján végezzük el az alábbi szorzásokat!
a) $(x + 3y)(x - 3y)$; *b)* $(2x^2 + y)(2x^2 - y)$; *c)* $(5a^3b + 2ab^2)(5a^3b - 2ab^2)$.

a) $x^2 - 9y^2$; *b)* $4x^4 - y^2$; *c)* $25a^6b^2 - 4a^2b^4$.

8. E1 Végezzük el a négyzetre emeléseket!
a) $\left(\frac{1}{3}x^3y^2 - 2xy\right)^2$; *b)* $\left(\frac{3}{5}a^2b^3 + \frac{5}{3}a^3b^2\right)^2$; *c)* $\left(\frac{4}{5}x^ny^2 - \frac{5}{3}x^2y^n\right)^2$.

a) $\frac{1}{9}x^6y^4 - \frac{4}{3}x^4y^3 + 4x^2y^2$; *b)* $\frac{9}{25}a^4b^6 + 2a^5b^5 + \frac{25}{9}a^6b^4$;
c) $\frac{16}{25}x^{2n}y^4 - \frac{8}{3}x^{n+2}y^{n+2} + \frac{25}{9}x^4y^{2n}$.

9. K2 Két tag négyzetét számoltuk ki; mi lehet az eredmény hiányzó harmadik tagja?
a) $(..........)^2 = 16x^2 + 8xy$ ....;
b) $(..........)^2 = 4a^4 - 12a^3b$ ....;
c) $(..........)^2 = 25p^6 - 20p^5q$ ....

a) $(4x + y)^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$; *b)* $(2a^2 - 3ab)^2 = 4a^4 - 12a^3b + 9a^2b^2$;

c) $(5p^3 - 2p^2q)^2 = 25p^6 - 20p^5q + 4p^4q^2$.

10. K2 Két tag összegének, illetve különbségének harmadik hatványáról tanultak alapján végezzük el az alábbi köbre emeléseket!
a) $(2a + 1)^3$; *b)* $(2x + 3y)^3$; *c)* $(k^2 - 2k)^3$.

a) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$; *b)* $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$;
c) $k^6 - 6k^5 + 12k^4 - 8k^3$.

6. További nevezetes szorzatok (Emelt szint)

1. E1 Végezzük el a négyzetre emeléseket!

a) $(x+2y+z)^2$; b) $(2a+3b-c)^2$; c) $\left(\frac{1}{2}a-3b^2+\frac{2}{3}ab\right)^2$.

a) $x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz+4yz$; b) $4a^2+9b^2+c^2+12ab-4ac-6bc$;

c) $\frac{1}{4}a^2+9b^4+\frac{4}{9}a^2b^2-3ab^2+\frac{2}{3}a^2b-4ab^3$.

2. E1 Alakítsuk szorzattá az alábbi kéttagú összegeket!

a) x^7+1; b) p^6-q^3; c) a^5+32; d) $27k^3-y^9$.

a) $(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$; b) $(p^2)^3-q^3=(p^2-q)(p^4+p^2q+q^2)$;

c) $a^5+2^5=(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16)$; d) $(3k-y^3)(9k^2+3ky^3+y^6)$.

3. E1 Igazoljuk, hogy $123^{24}-1$ osztható 15 130-cal!

$(123^4)^6-1^6=(123^4-1)\cdot K$, ahol K egész szám. Tehát $(123^2-1)(123^2+1)\cdot K$.
De $123^2+1=15\,130$, tehát a kifejezés osztható 15 130-cal.

4. E1 Háromtagú összeg négyzetéről tanultak alapján végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!

a) $(a-b+2c)^2$; b) $(2x-3y-z)^2$; c) $(p+2q+3z)^2$.

a) $a^2+b^2+4c^2-2ab+4ac-4bc$; b) $4x^2+9y^2+z^2-12xy-4xz+6yz$;
c) $p^2+4q^2+9z^2+4pq+6pz+12qz$.

5. E2 Háromtagú összeg négyzetéről tanultak alapján végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!

a) $(2a^3-3ab+b^2)^2$; b) $\left(\frac{3}{4}p^2+\frac{2}{3}p^2q^2-\frac{1}{2}q^2\right)^2$; c) $(2a^k-3b^{k+1}+a^kb^{k-1})^2$.

a) $4a^6+9a^2b^2+b^4-12a^4b+4a^3b^2-6ab^3$;
b) $\frac{9}{16}p^4+\frac{4}{9}p^4q^4+\frac{1}{4}q^4+p^4q^2-\frac{3}{4}p^2q^2-\frac{2}{3}p^2q^4$;
c) $4a^{2k}+9b^{2k+2}+a^{2k}b^{2k-2}-12a^kb^{k+1}+4a^{2k}b^{k-1}-6a^kb^{2k}$.

6. K2 Számítsuk ki az alábbi kifejezések megfelelő helyettesítési értékét!

a) $(2a^2-3b)^2-(2a^2+3b)(2a^2-3b)+12a^2b$, $a=-1{,}9$, $b=\frac{1}{3}$;

b) $(1+x+x^2)^2-2x(1+x^2)-x^4$, $x=-\frac{3}{5}$;

c) $(6k^2-5n)(6k^2+5n)-6k^2(12+10n)+(6k^2+5n)^2$, $k=1$, $n=-12{,}5$.

a) $4a^4-12a^2b+9b^2-4a^4+9b^2+12a^2b=18b^2=18\cdot\frac{1}{9}=2$;

b) $1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3-2x-2x^3-x^4=3x^2+1=\frac{52}{25}$;

c) $36k^4-25n^2-72k^2-60k^2n+36k^4+60k^2n+25n^2=-72k^2=-72$.

7. Összegek szorzattá alakítása

1. K1 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $2ax^2 + 6ax - 4ax^3$; b) $3k^2 - 12k + 24k^6$; c) $5p^3q^4 - 25p^4q^3 + 10p^5q^5$.

a) $2ax(x + 3 - 2x^2)$; b) $3k(k - 4 + 8k^5)$; c) $5p^3q^3(q - 5p + 2p^2q^2)$.

2. K2 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $2a + 2b + a^2 - b^2$; b) $p^3q - q^3p + 4p^2 + 8pq + 4q^2$; c) $x^3 - y^3 + x^2 - y^2$.

a) $2(a+b) + (a+b)(a-b) = (a+b)(2+a-b)$;

b) $pq(p^2 - q^2) + 4(p+q)^2 = pq(p-q)(p+q) + 4(p+q)^2 = (p+q)[pq(p-q) + 4(p+q)]$;

c) $(x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(x+y) = (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$.

3. K2 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $a^4 + a - 14$; b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 4x^2$; c) $k^3 + k^2 - 2$.

a) $a^4 - 16 + a + 2 = (a^2-4)(a^2+4) + a + 2 = (a-2)(a+2)(a^2+4) + a + 2 =$

$= (a+2)[(a-2)(a^2+4) + 1] = (a+2)(a^3 - 2a^2 + 4a - 7)$;

b) $(a+b+c)^2 - 4x^2 = (a+b+c+2x)(a+b+c-2x)$;

c) $k^3 - 1 + k^2 - 1 = (k-1)(k^2+k+1) + (k-1)(k+1) = (k-1)(k^2+2k+2)$.

4. K1 Alakítsuk szorzattá az alábbi összegeket!

a) $6a^2x - 12ax^2 + 3a^2x^2$; b) $8p^3q + 2p^2q^2 + 6pq^3 - 4pq$; c) $2ab^2c + 4a^2bc - 8abc^2 + 20abc$.

a) $3ax(2a - 4x + ax)$; b) $2pq(4p^2 + pq + 3q^2 - 2)$; c) $2abc(b + 2a - 4c + 10)$.

5. K2 A tagok megfelelő csoportosításával alakítsuk szorzattá a következő összegeket!

a) $5ax + 2x + 5ay + 2y$; b) $k^3 + 3k^2 + 3k + 9$; c) $a^2c + 2bc - 3a^2d - 6bd$;

d) $a^2 - b^2 + a + b$; e) $x^3 - x^2y + y^3 - xy^2$.

a) $(x+y)(5a+2)$; b) $(k+3)(k^2+3)$; c) $(c-3d)(a^2+2b)$;

d) $(a+b)(a-b+1)$; e) $(x-y)^2(x+y)$.

6. E1 A nevezetes szorzatok alkalmazásával alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $pq(k^2 - n^2) + k^2n + kn^2$;

b) $4(xz + yr)^2 - (x^2 - y^2 - r^2 + z^2)^2$;

c) $a^5 + a^4 - 2a^3 - 2a^2 + a + 1$.

a) $pq(k-n)(k+n) + kn(k+n) = (k+n)(pqk - pqn + kn)$;

b) $(2xz + 2yr)^2 - (x^2 - y^2 - r^2 + z^2)^2 = (2xz + yr + x^2 - y^2 - r^2 + z^2)(2xz + yr - x^2 + y^2 + r^2 - z^2) =$

$= [(x+z)^2 - (y-r)^2] \cdot [(y+r)^2 - (x-z)^2] =$

$= (x+z+y-r)(x+z-y+r)(y+r+x-z)(y+r-x+z)$;

c) $a^4(a+1) - 2a^2(a+1) + a + 1 = (a+1)(a^4 - 2a^2 + 1) = (a+1)(a^2-1)^2$.

7. E2 Egy háromszög oldalai a, b és c. Igazoljuk, hogy ekkor az alábbi kifejezés értéke negatív szám!

$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$.

A kéttagú összeg két négyzet különbsége, ezért így alakítható szorzattá:

$(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$.

A kapott négytényezős szorzat első három tényezője – a háromszög-egyenlőtlenség miatt – pozitív, utolsó tényezője negatív, tehát a szorzat negatív.

8. Algebrai törtek egyszerűsítése, összevonása

Az alábbi feladatokban feltételezzük, hogy a változók semmilyen értékére sem lesznek 0-k a feladatokban előforduló törtek nevezői.

1. K1 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{3x^2b}{b^3x}$; b) $\frac{(p+q)x^6y}{(p^2+2pq+q^2)y^2}$; c) $\frac{5a^2-5x^2}{10a^2+20ax+10x^2}$.

a) $\frac{3x}{b^2}$; b) $\frac{x^6}{(p+q)y}$; c) $\frac{5(a-x)(a+x)}{10(a+x)^2}=\frac{a-x}{2(a+x)}$.

2. K1 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{2ax+6bx+aq+3bq}{a^2+6ab+9b^2}$; b) $\frac{3x^3-3y^3}{9x^2-18xy+9y^2}$.

a) $\frac{2x(a+3b)+q(a+3b)}{(a+3b)^2}=\frac{2x+q}{a+3b}$;

b) $\frac{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{9(x-y)^2}=\frac{x^2+xy+y^2}{3(x-y)}$.

3. K2 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}$; b) $\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}$; c) $\frac{a+b}{2a^2-2b^2}+\frac{a-b}{3a+3b}-\frac{1}{a-b}$.

a) $\frac{(a+1)-(a-1)}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;

b) $\frac{x(2x-1)+x(2x+1)}{4x^2-1}=\frac{4x^2}{4x^2-1}$;

c) $\frac{a+b}{2(a-b)(a+b)}+\frac{a-b}{3(a+b)}-\frac{1}{a-b}=\frac{3(a+b)+2(a-b)^2-6(a+b)}{6(a^2-b^2)}=$

$=\frac{2(a-b)^2-3(a+b)}{6(a^2-b^2)}$.

4. E1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{2y-3}{9y^2-1}+\frac{y-1}{3y+1}-\frac{1+2y}{6y-2}$; b) $\frac{x+2}{4x^2-1}+\frac{2x-3}{4x+2}-\frac{x-3}{2x-1}$.

a) $\frac{2(2y-3)+2(3y-1)(y-1)-(3y+1)(1+2y)}{2(3y-1)(3y+1)}=\frac{-9y-5}{2(3y-1)(3y+1)}$;

b) $\frac{2(x+2)+(2x-1)(2x-3)-2(2x+1)(x-3)}{2(4x^2-1)}=\frac{4x+13}{2(4x^2-1)}$.

5. E1 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{4p^3q+4pq^3}{p^4-q^4}$; b) $\frac{a^2+2ab+b^2}{2a^4-2b^4}$; c) $\frac{(x+y)^2-a^2}{x+y+a}$.

a) $\frac{4pq}{p^2-q^2}$; b) $\frac{a+b}{2(a-b)(a^2+b^2)}$; c) $x+y-a$.

6. E2 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\dfrac{2xy - x^2 - y^2 + a^2}{a^2 + x^2 - y^2 + 2ax}$; b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$; c) $\dfrac{e^3 - e^2f + ef^2}{e^3 + f^3}$.

a) $\dfrac{a^2 - (x-y)^2}{(a+x)^2 - y^2} = \dfrac{(a+x-y)(a-x+y)}{(a+x+y)(a+x-y)} = \dfrac{a-x+y}{a+x+y}$;

b) A nevezőt így alakíthatjuk:

$x^2 + 8x + 7 = x^2 + x + 7x + 7 = x(x+1) + 7(x+1) = (x+1)(x+7)$,

$\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x+7)} = \dfrac{x+1}{x+7}$;

c) $\dfrac{e(e^2 - ef + f^2)}{(e+f)(e^2 - ef + f^2)} = \dfrac{e}{e+f}$.

7. K1 Végezzük el a következő összevonásokat!

a) $\dfrac{x}{ab} + \dfrac{y}{ac}$; b) $b + \dfrac{2a - b}{3}$; c) $\dfrac{2y}{3a - 3} + \dfrac{5y}{a - 1}$.

a) $\dfrac{cx + by}{abc}$; b) $\dfrac{2(a+b)}{3}$; c) $\dfrac{17y}{3(a-1)}$.

8. K2 Végezzük el a következő összevonásokat!

a) $\dfrac{3}{2x + 6} + \dfrac{x - 3}{x^2 + 6x + 9}$; b) $\dfrac{5}{2a^2 + 6a} - \dfrac{2 - a^2}{a^2 - 9} + 2$; c) $\dfrac{1}{p - 1} + \dfrac{2}{p + 1} - \dfrac{3p}{p^2 - 2p + 1}$.

a) $\dfrac{3(x+3) + 2(x-3)}{2(x+3)^2} = \dfrac{5x + 3}{2(x+3)^2}$;

b) $\dfrac{5}{2a(a+3)} - \dfrac{2 - a^2}{(a-3)(a+3)} + 2 = \dfrac{5(a-3) - 2a(2 - a^2) + 4a(a+3)(a-3)}{2a(a+3)(a-3)} = \dfrac{6a^3 - 35a - 15}{2a(a^2 - 9)}$;

c) $\dfrac{(p-1)(p+1) + 2(p-1)^2 - 3p(p+1)}{(p-1)^2(p+1)} = \dfrac{-7p + 1}{(p-1)^2(p+1)}$.

9. E1 Végezzük el a következő összevonásokat!

a) $\dfrac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 1} - \dfrac{1 - 2x}{x^2 + x + 1} - \dfrac{6}{x - 1}$;

b) $\dfrac{1}{x - y} - \dfrac{3xy}{x^3 - y^3} - \dfrac{y - x}{x^2 + xy + y^2}$;

c) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)} - \dfrac{1}{(b-c)(a-c)} - \dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$.

a) $\dfrac{4x^2 - 3x + 5 - (x-1)(1 - 2x) - 6(x^2 + x + 1)}{x^3 - 1} = \dfrac{-12x}{x^3 - 1}$;

b) $\dfrac{x^2 + xy + y^2 - 3xy - (y-x)(x-y)}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} = \dfrac{(x-y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} = \dfrac{2x - 2y}{x^2 + xy + y^2}$;

c) $\dfrac{c - a + a - b + b - c}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$.

9. Algebrai törtek szorzása, osztása, összetett műveletek algebrai törtekkel

1. K1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{6p^3k^2}{x^2y}\cdot\frac{2pk^3}{3xy^2}$; b) $\frac{6p^2+12pq+6q^2}{4a^3b^5}\cdot\frac{2p^3q^3}{5(p+q)}$; c) $\frac{4xy^3}{7rs^5}\cdot\frac{3x^2y^4}{r^2s}\cdot\frac{5x^4y^5}{2r^4s^3}$.

a) $\frac{4p^4k^5}{x^3y^3}$; b) $\frac{3(p+q)p^3q^3}{5a^3b^5}$; c) $\frac{30x^7y^{12}}{7r^7s^9}$.

2. K1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{2a^2b}{3xy}:\frac{5xy^3}{14a^3b^2}$; b) $\left(\frac{2pa^2}{3b^2}:\frac{4b^3a^3}{5p^2}\right)\cdot\frac{2a^2b}{7p^5}$.

a) $\frac{28a^5b^3}{15x^2y^4}$; b) $\frac{10p^3a^2}{12b^5a^3}\cdot\frac{2a^2b}{7p^5}=\frac{5a}{21b^4p^2}$.

3. K2 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right):(x+y)$;

b) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}\right):\frac{2x+2y}{x^3y^3}$;

c) $\left(\frac{2k+1}{2k-1}-\frac{2k-1}{2k+1}\right):\frac{8k}{6k-3}$.

a) $\left(\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{y-x}{xy}\right)\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{(y+x)(y-x)}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{y-x}{x^2y^2}$;

b) $\frac{y^2+x^2+2xy}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3y^3}{2(x+y)}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3y^3}{2(x+y)}=\frac{xy(x+y)}{2}$;

c) $\frac{(2k+1)^2-(2k-1)^2}{4k^2-1}\cdot\frac{3(2k-1)}{8k}=\frac{8k}{(2k-1)(2k+1)}\cdot\frac{3(2k-1)}{8k}=\frac{3}{2k+1}$.

4. E1 Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét, ha $x=4$!

$\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot(x^2-1)$.

$\frac{x^2-1+x+1-(x-1)}{x^2-1}\cdot(x^2-1)=x^2+1=17$.

5. E1 Igazoljuk, hogy ha $\frac{x-y}{y-z}=\frac{x}{z}$, akkor $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$!

Szorozzuk „keresztbe” a megadott egyenlőséget:

$xz-yz=xy-xz$, azaz $2xz=xy+zy$.

Most osszuk el a kapott egyenlet mindkét oldalát xyz-vel, ami biztosan nem 0; azt kapjuk:

$\frac{2}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}$.

6. E1 A kijelölt műveletek elvégzésével hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)$;

b) $\left(\frac{p}{2q}+\frac{2q}{p}\right)^2-\left(\frac{p}{2q}-\frac{2q}{p}\right)^2$;

c) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right)$;

d) $\left(\frac{2a+2}{a^2+2a}+\frac{a}{2a+4}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}-\frac{1}{a}$;

e) $\left(\frac{x^2}{y^3-x^2y}+\frac{1}{x+y}\right):\left(\frac{y-x}{y^2+xy}-\frac{y}{x^2+xy}\right)$.

a) $\frac{x+x+1}{x+1}:\frac{1-x^2-3x^2}{1-x^2}=\frac{2x+1}{x+1}\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(1-2x)(1+2x)}=\frac{1-x}{1-2x}$;

b) $\left(\frac{p}{2q}+\frac{2q}{p}+\frac{p}{2q}-\frac{2q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{2q}+\frac{2q}{p}-\frac{p}{2q}+\frac{2q}{p}\right)=\frac{2p}{2q}\cdot\frac{4q}{p}=4$;

c) $\frac{b^2-2ab+a^2}{ab(a+b)}:\frac{b^2+a^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\cdot\frac{ab}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}$;

d) $\frac{4a+4+a^2}{2a(a+2)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}-\frac{1}{a}=\frac{(a+2)^2(2a+2)}{2a(a+2)^2}-\frac{1}{a}=\frac{2a+2}{2a}-\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$;

e) $\frac{x^2+y^2-xy}{y(y-x)(y+x)}:\frac{xy-x^2-y^2}{xy(x+y)}=\frac{x^2+y^2-xy}{y(y-x)(y+x)}\cdot\frac{xy(x+y)}{xy-x^2-y^2}=-\frac{x}{y-x}=\frac{x}{x-y}$.

7. E1 Legyen k egy pozitív valós szám. Mivel egyenlő a^3+b^3, ha $a+b=k$ és $a^2+b^2=2k$?

$(a+b)^2=k^2=a^2+b^2+2ab=2k+2ab \longrightarrow ab=\frac{k^2-2k}{2}$.

$(a+b)^3=k^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Tehát $a^3+b^3=k^3-3k\cdot\frac{k^2-2k}{2}=\frac{-k^3+6k}{2}$.

8. E1 Igazoljuk, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2!

Azt kell igazolnunk, hogy $a+\frac{1}{a}\geq 2$. Szorozzuk meg mindkét oldalt $a>0$-val: $a^2-2a+1\geq 0$, azaz $(a-1)^2\geq 0$, ami nyilvánvaló. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a=1$.

9. E2 Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

Elvégezve a szorzást, azt kapjuk:

$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\geq 9$, azaz $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq 6$.

Ez pedig az előző feladat alapján már nyilvánvaló.

10. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, akkor $\frac{x^2+2yz+2xz+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{z^2}$!

$z=\frac{xy}{x+y}$. Ezt a bizonyítandó egyenlőségbe helyettesítve adódik az állítás.

11. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha k pozitív egész szám, akkor az alábbi kifejezés értéke is egész szám!

$\left(\frac{9}{k^2}+\frac{k}{3}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{k^2}-\frac{1}{k}\right)$.

$\frac{27+k^3}{3k^2}\cdot\frac{3k^2}{k^2-3k+9}=\frac{(3+k)(k^2-3k+9)}{k^2-3k+9}=3+k$, ami pozitív egész, ha k pozitív egész.

10. Oszthatóság

1. K1 Vizsgáljuk meg az alábbi számokat 3-mal, 4-gyel és 6-tal való oszthatóság szempontjából!
a) 3672; *b)* 88 716; *c)* 52 491; *d)* 41 782.

a) Ez esetben a számjegyek összege 18, tehát a kérdéses szám osztható 3-mal. Mivel az utolsó két jegye 72, ami osztható 4-gyel, így a megadott szám osztható 4-gyel is és 6-tal is.
b) A megadott szám osztható 4-gyel is és 6-tal is (így természetesen 3-mal is).
c) A számjegyek összege osztható 3-mal, tehát a szám is osztható 3-mal. Mivel a kérdéses szám páratlan, így nem lehet 4-gyel (és 6-tal sem) osztható.
d) A megadott szám páros, de nem osztható 4-gyel. Mivel a számjegyek összege nem osztható 3-mal, így ez a szám sem 3-mal, sem 4-gyel, sem 6-tal nem osztható.

2. K2 Igazoljuk, hogy ha $19 | 2a + 3b$ és $19 | a + 6b$, akkor 19 a-nak is és b-nek is osztója!

Ha $19 | a + 6b$, akkor $19 | 2a + 12b$, de a feltételek szerint $19 | 2a + 3b$. E két utóbbi miatt $19 | 2a + 12b - 2a - 3b = 9b$. Ebből következik, hogy $19 | b$, innen pedig $19 | a$ is teljesül.

3. K1 Mekkora legyen az X számjegy, hogy a 217 és $54X$ számok összege osztható legyen 9-cel?

$217 = 9K + 1$, ezért $54X$-nek 9-cel osztva 8 maradékot kell adnia. Mivel $5 + 4 = 9$, ezért $X = 8$.

4. K2 Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi kifejezést elosztjuk 5-tel?
$(4k + 1)^2 + (3k - 1)^2 + 3(k + 1)$.

$16k^2 + 8k + 1 + 9k^2 - 6k + 1 + 3k + 3 = 25k^2 + 5k + 5 = 5(5k^2 + k + 1)$. Tehát a kifejezés 5-tel osztható, nincs maradék.

5. K1 Az alábbi számok közül melyek oszthatók 4-gyel, illetve 9-cel?
a) 11 648; *b)* 33 336; *c)* 27 549; *d)* 5080; *e)* 32 974.

4-gyel osztható az *a)*, *b)*, *d)*; 9-cel osztható a *b)* és a *c)*.

6. K1 Az alábbi ötjegyű szám osztható 45-tel. Milyen számjegy lehet X és Y?
$\overline{12\,X6Y}$

$Y = 0$ és $X = 0$ vagy $Y = 0$ és $X = 9$ vagy $Y = 5$ és $X = 4$.

7. K1 Az a természetes szám 7-tel osztva 3 maradékot ad, a b természetes szám 7-tel osztva 4 maradékot ad. Mit kapunk maradékul, ha az alábbi számokat elosztjuk 7-tel?
a) $a + 2b$; *b)* $5a + 3(b + 2)$; *c)* $b(a^2 + 1)$.

a) $a + 2b = 7r + 4$; *b)* $5a + 3(b + 2) = 7s + 5$; *c)* $b(a^2 + 1) = 7k + 5$.

8. K1 Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi számokat elosztjuk 13-mal?
a) $26k + 28$; *b)* $(2n + 3)(6n - 1) + n(n - 2) - n + 6$.

a) $26k + 28 = 13n + 2$; *b)* $13n^2 - 13n + 3 = 13s + 3$.

11. Prímszámok, a számelmélet alaptétele

1. K1 Hány darab prímszám van 50 és 100 között?

Az 50 és 100 közé eső prímek: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; 10 darab.

2. K1 Végezzük el az alábbi számok prímtényezős felbontását!
a) 8565; *b)* 4002; *c)* 1539.

a) $8565 = 3 \cdot 5 \cdot 571$; *b)* $4002 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$; *c)* $1539 = 3^4 \cdot 19$.

3. K2 Keressük meg az összes olyan p prímszámot, melyre $4 + p$ és $8 + p$ is prímszám!

Ha p 3-mal osztva 1 maradékot ad, $p = 3k + 1$, akkor $8 + p = 8 + 3k + 1 = 9 + 3k$ osztható 3-mal, tehát nem lehet prím. Ha p 3-mal osztva 2 maradékot ad, $p = 3k + 2$, akkor $4 + p = 4 + 3k + 2 = 6 + 3k$ szintén osztható 3-mal, tehát nem lehet prím. Ha p osztható 3-mal, akkor csak $p = 3$ lehet; ekkor $4 + p = 7$, $8 + p = 11$, mindkettő prím. Tehát egyedül a $p = 3$ lehetséges.

4. E1 Melyek azok a p prímek, melyekre $2p + 1$ egy természetes szám köbével egyenlő?

$2p + 1 = n^3$, ahol n biztosan páratlan szám, $n = 2k + 1$. Ekkor
$2p + 1 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$, ahonnan $p = k(4k^2 + 6k + 3)$.
Ez csak akkor lehetséges, ha $k = 1$, és ezzel $4k^2 + 6k + 3 = 13$ valóban prím. Tehát egyetlen prím felel meg a feltételeknek: $p = 13$. Ekkor $2p + 1 = 27 = 3^3$.

5. K2 Fejtsük meg ezt a keresztrejtvényt, ahol a négyzetekbe számjegyeket kell írni!
Vízsz.: 1. 20-nál kisebb prímszám, mely jegyeinek összege köbszám. *2.* Egy prímszám kétszerese. *3.* 9-cel osztható szám.
Függ.: 1. Négyzetszám. *2.* Azonos a vízsz. 1-gyel.

■	1	
2		■
3		

■	1	7
1	4	■
7	4	7

■	1	7
1	0	■
7	0	2

6. E1 Legyenek $p > q > r$ prímszámok. Mi a megoldása az alábbi egyenletnek?
$p + q + r = 22$.

Csak $r = 2$ lehetséges. Ekkor $p + q = 20$, ahonnan $p = 17$, $q = 3$, vagy $p = 13$, $q = 7$.

7. E1 Milyen pozitív egész n-re teljesül, hogy $n^2 + 10n$ prímszám?

$n(n + 10) =$ prím csak úgy lehetséges, ha $n = 1$; ekkor $10 + n = 11$ az egyetlen ilyen prímszám.

12. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1. K2 Legyenek $A = 2^3 \cdot 5 \cdot 11^2$, $B = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, $C = 3^3 \cdot 7 \cdot 11^3$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!
a) $[(A;\, B);\, C]$; *b)* $([B;\, C];\, A)$.

a) $(A;B) = 2^3 \cdot 5$, tehát $[(A;B);C] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3$;
b) $[B;C] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^3$, tehát $([B;C];A) = 2^3 \cdot 5 \cdot 11^2$.

2. K2 Milyen pozitív egész n és k számokra teljesül, hogy $(n;\, k) = 26$ és $[n;\, k] = 4784$?

$26 = 2 \cdot 13$, $4787 = 2^4 \cdot 13 \cdot 23$. Az n és a k is tartalmazza a 13-at. Egyikükben 2, a másikban 2^4 szerepel. A 23 prímtényező bármelyikben lehet. Tehát $n = 2^4 \cdot 13 \cdot 23$, $k = 2 \cdot 13$, vagy $n = 2^4 \cdot 13$, $k = 2 \cdot 13 \cdot 23$.

3. K2 Melyik az a legkisebb 1-nél nagyobb pozitív egész szám, amelyik 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 7-tel, 8-cal és 9-cel osztva egyaránt 3 maradékot ad?

Ha a keresett szám n, akkor $n - 3$ a megadott számok mindegyikével osztható, vagyis e számok legkisebb közös többszörösét keressük. $[4, 5, 6, 7, 8, 9] = 2520$. Tehát a keresett szám $n = 2523$.

4. K1 Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét (p, q, r, s, t különböző prímek)!
a) 5660, 315; *b)* 3444, 720; *c)* p^3qs^2t, pqs^4r^2.

a) $(5660; 315) = 5$, $[5660; 315] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 283$;
b) $(3444; 720) = 2^2 \cdot 3$, $[3444; 720] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41$;
c) $(p^3qs^2t;\, pqs^4r^2) = pqs^2$, $[p^3qs^2t;\, pqs^4r^2] = p^3qs^4tr^2$.

5. K2 Legyenek $A = 110$, $B = 120$, $C = 450$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!
a) $[(A;\, C);\, B]$; *b)* $[(A;\, B);\, (C;\, B)]$; *c)* $([B;\, C];\, A)$.

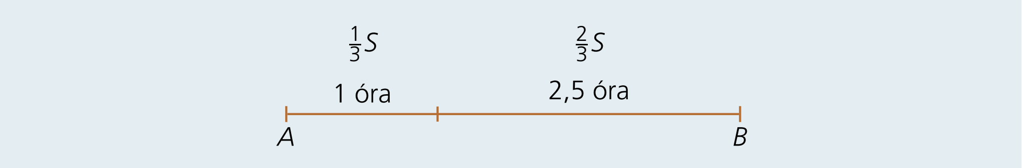
a) $[(A;C);B] = 120$; *b)* $[(A;B);(C;B)] = 30$; *c)* $([B;C];A) = 10$.

6. E1 Ha az alábbi törtek egyszerűsíthetők, akkor mivel egyszerűsíthetők?
a) $\dfrac{2n-3}{n+2}$; *b)* $\dfrac{3n-1}{2n+6}$; *c)* $\dfrac{10k+1}{4k-2}$.

a) Ha a tört d-vel egyszerűsíthető, akkor $2n - 3 = rd$ és $n + 2 = sd$. A második egyenlet kétszeresét az elsőből kivonva: $7 = d(2s - r)$, ha tehát a tört egyszerűsíthető, akkor csak 7-tel egyszerűsíthető.
b) Ha a tört egyszerűsíthető, akkor 20-szal (vagy annak valamelyik osztójával) egyszerűsíthető.
c) Ha a tört egyszerűsíthető, akkor csak 3-mal egyszerűsíthető.

7. K2 Egy kerékpáros egy AB távolság első harmadát egy óra alatt tette meg, az út hátralevő részét pedig 2,5 óra alatt. Sebessége mindkét szakaszon km/h-ban mérve egész szám, melyek legkisebb közös többszöröse 120. Mekkora az AB távolság?

Legyen v_1, illetve v_2 az út első, illetve második szakaszán a sebesség.



Ekkor $\frac{\frac{S}{3}}{v_1} = 1$ és $\frac{\frac{2}{3}S}{v_2} = 2{,}5$. Az első egyenletből $\frac{S}{3} = v_1$; ezzel a második egyenlet

$\frac{2v_1}{v_2} = 2{,}5,$ azaz $\frac{v_1}{v_2} = \frac{2{,}5}{2} = \frac{5}{4}$.

Ezek szerint valamely n természetes számra $v_1 = 5n$, $v_2 = 4n$ és $[5n; 4n] = 120$.

Mivel $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ezért az n prímtényezős felbontásában az 5 nem szerepelhet, hiszen ha benne lenne, akkor a legkisebb közös többszörösben már 5^2-nak kellene szerepelnie. Ugyanakkor az n prímfelbontásában a 3-nak benne kell lennie az első hatványon, valamint a 2-nek is szerepelnie kell (2-nek magasabb kitevőjű hatványa már nem szerepelhet, mert akkor v_2 miatt már 2^4 szerepelne a legkisebb közös többszörösben). Tehát csak $n = 2 \cdot 3 = 6$ lehetséges, így $v_1 = 30$, $v_2 = 24$. Az első órában megtett út 30 km, a második szakaszon megtett út $2{,}5 \cdot 24 = 60$ km, vagyis az AB távolság 90 km.

8. E1 Az n és k pozitív egészek legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse: $(n; k) = p^2$, $[n; k] = p^3q^2$, ahol p és q különböző prímszámok. Határozzuk meg n és k prímtényezős alakját!

$n = p^2$, $k = p^3q^2$ vagy $n = p^2q^2$, $k = p^3$ (természetesen n és k szerepe felcserélhető).

9. E1 Fejtsük meg a keresztrejtvényt!

Vízsz.: 1. Eggyel csökkenő számjegyek. *3.* Egy négyzetszám fordítottja. *4.* A 40-nél kisebb prímszámok száma. *5.* Osztható 24-gyel.

Függ.: 1. Egy ikerprímpár nagyobbik tagja. *2.* 9-cel osztható „palindrom"-szám (azaz olyan szám, mely visszafelé olvasva is ugyanaz). *3.* A 40 és 50 közé eső prímek összegének ötszöröse. *4.* Egy köbszám negyede.

■	^{1}		^{2}
^{3}		■	
	■	^{4}	
^{5}			■

■	^{1}4	3	^{2}2
^{3}6	3	■	5
5	■	^{4}1	2
^{5}5	7	6	■

13. Osztók száma, négyzetszámok (Emelt szint)

1. E1 Határozzuk meg az alábbi számok osztóinak a számát!

a) 240; *b)* 500; *c)* 625; *d)* 1110.

A megadott számok prímtényezős felbontása alapján:

a) $d(240) = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$; *b)* $d(500) = 12$; *c)* $d(625) = 5$; *d)* $d(1110) = 16$.

2. E1 Az A és B számok prímtényezős alakja: $A = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11$; $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Mivel egyenlő $d(A \cdot B)$?

$A \cdot B = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11$, tehát $d(A \cdot B) = 576$.

3. E2 Melyik az a legkisebb természetes szám, mely osztható 12-vel, és amelyre $d(N) = 12$?

Ha $d(N) = 12$, és N osztható 12-vel, akkor N-nek legalább két különböző prím osztója van. Így N prímtényezős alakja az alábbiak egyike:

$N = p \cdot q^5$, $N = p^2 \cdot q^3$, $N = p \cdot q \cdot r^2$.

A legkisebb prímszámokat figyelembe véve a keresett szám: $N = 60$.

4. E1 Valamely N természetes számra $d(d(N)) = 3$. Hány különböző prím osztója lehet N-nek?

Ha $d(d(N)) = 3$, akkor $d(N) = p^2$. Ezek szerint vagy $N = q^{p^2-1}$, vagy $N = q^{p-1} \cdot r^{p-1}$. Tehát az N prímtényezős alakjában legfeljebb kétféle különböző prímszám szerepelhet csak.

5. E2 Legyen $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $b = 2 \cdot 5^3 \cdot 7$. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket!
a) $d(ab)$; *b)* $d([a; b])$; *c)* $d((a; b))$.

a) $d(ab) = d(2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7) = 100$; *b)* $d([a; b]) = 64$; *c)* $d((a; b)) = 4$.

6. E1 Az N természetes szám prímtényezős alakja $N = 2^x \cdot 3^y$. Az N háromszorosának 4-gyel, az N kétszeresének pedig 5-tel több osztója van, mint N-nek. Melyik ez az N szám?

Egyrészt $(x+1)(y+2) = (x+1)(y+1) + 4$, ahonnan $x = 3$, másrészt pedig $(x+2)(y+1) = (x+1)(y+1) + 5$, ahonnan $y = 4$. Tehát $N = 2^3 \cdot 3^4 = 648$.

7. E2 Melyik az a legkisebb természetes szám, melynek 42 osztója van, és osztható 42-vel?

Ha az N természetes szám osztható 42-vel, akkor osztható 2-vel, 3-mal és 7-tel. Ha 42 osztója van (és a legkisebb ilyet keressük), akkor prímtényezős alakja: $N = p_1^6 \cdot p_2^2 \cdot p_3$. A szükséges prím osztókat úgy helyezzük el, hogy a legmagasabb kitevőjű legyen a legkisebb prím és így tovább. A keresett szám: $N = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4032$.

8. E2 Valamely N természetes számra $d(d(N)) = 5$. Legfeljebb hány darab különböző prím osztója lehet az N számnak?

Ha $d(d(N)) = 5$, akkor $d(N) = p^4 = p \cdot p \cdot p \cdot p$. Tehát N különböző prím osztóinak a száma legfeljebb 4.

9. E1 A következő számok közül melyek négyzetszámok?
a) $2^7 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; *b)* $3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^6$; *c)* $2^2 \cdot 5^{10} \cdot 13^6$.

a) Nem négyzetszám; *b)* $(3^2 \cdot 5 \cdot 11^3)^2$; *c)* $(2 \cdot 5^5 \cdot 13^3)^2$.

10. E2 Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel a 14 520-at meg kell szoroznunk ahhoz, hogy négyzetszámot kapjunk?

$14\,520 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$. A keresett szám: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

11. E2 Igazoljuk, hogy a következő szám nem lehet négyzetszám!
$2004^{2004} + 2005^{2005} + 2006^{2006}$.

2004^{2004} utolsó számjegye 6, a második tag 5-re, a harmadik 6-ra végződik. Tehát a háromtagú összeg utolsó számjegye $6 + 5 + 6 = \ldots 7$, amire nem végződhet négyzetszám.

14. Számrendszerek

1. K1 Írjuk fel az alábbi számokat a 10-es számrendszerben!
a) $12\,021_3$; *b)* $30\,520_6$; *c)* 5016_7.

a) $12\,021_3 = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 142_{10}$;
b) $30\,520_6 = 3 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot 1 = 4080_{10}$;
c) $5016_7 = 5 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 6 = 1728_{10}$.

2. K1 Írjuk fel a 10-es számrendszerbeli 976 számot a
a) 2-es számrendszerben; *b)* 3-as számrendszerben!

a) $976_{10} = 1111010000_2$; *b)* $976_{10} = 1100011_3$.

3. K2 Végezzük el a következő műveleteket, és adjuk meg az eredmény 10-es számrendszerbeli alakját!

a) $11011_2 + 101101_2 + 111101_2$; *b)* $2101_3 + 20021_3 + 1202_3$.

a) $11011_2 + 101101_2 + 111101_2 = 27 + 45 + 61 = 133_{10}$;
b) $2101_3 + 20021_3 + 1202_3 = 64 + 169 + 47 = 280_{10}$.

4. E1 Igazoljuk, hogy egy 6-os számrendszerbeli szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha számjegyeinek összege is osztható 5-tel!

Egy 6-os számrendszerben felírt szám általános alakja:
$c_n \cdot 6^n + c_{n-1} \cdot 6^{n-1} + c_{n-2} \cdot 6^{n-2} + \ldots + c_1 \cdot 6 + c_0$.
Ezt még így is írhatjuk:
$c_n \cdot (5+1)^n + c_{n-1} \cdot (5+1)^{n-1} + c_{n-2} \cdot (5+1)^{n-2} + \ldots + c_1 \cdot (5+1) + c_0$.
Az itt szereplő kéttagú összegek hatványaiban minden tag 5-nek hatványa (tehát osztható 5-tel), kivéve az utolsó tagokat, amelyek mindegyik esetben 1-esek. Tehát az összeg így írható valamilyen K egész számmal:
$5K + c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \ldots + c_1 + c_0$.
Ez pedig akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó tag, vagyis a felírt szám számjegyeinek összege osztható 5-tel.

5. K2 Egy derékszögű háromszög oldalai valamilyen x alapú számrendszerben 14_x, 40_x, 42_x. Mekkorák a háromszög oldalai a 10-es alapú számrendszerben?

$(x+4)^2 + (4x)^2 = (4x+2)^2$. Innen $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. De $x = 2$ nem lehet, mert a 2-es számrendszerben nincs 4-es számjegy, így csak $x = 6$ lehet. Ezzel a háromszög oldalai a 10-es számrendszerben: $14_6 = 10_{10}$, $40_6 = 24_{10}$, $42_6 = 26_{10}$.

6. E1 Bizonyítsuk be, hogy a c alapú számrendszerben azok és csak azok a számok oszthatók (c – 1)-gyel, melyek számjegyeinek összege is osztható (c – 1)-gyel!

A c alapú számrendszerben felírt szám általános alakja:
$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{n-2} + \ldots + a_1 c + a_0$.
Írjuk át ezt a következő alakban:
$a_n[(c-1)+1]^n + a_{n-1}[(c-1)+1]^{n-1} + a_{n-2}[(c-1)+1]^{n-2} + \ldots + a_1[(c-1)+1] + a_0$.
A kéttagú összegek hatványait kifejtve minden tag osztható $(c-1)$-gyel, kivéve az utolsó tagokat, melyek mindegyike 1. Tehát azt kaptuk:
$(c-1) \cdot K + a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$.
Ez akkor és csak akkor osztható $(c-1)$-gyel, ha $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$, vagyis a számjegyek összege osztható $(c-1)$-gyel.

7. K2 Hány darab hatjegyű szám van a 2-es számrendszerben? Ezek közül melyik a legkisebb és melyik a legnagyobb?

A legkisebb: $100000_2 = 32$, a legnagyobb $111111_2 = 63$, tehát a 2-es számrendszer hatjegyű számainak a száma: $63 - 31 = 32$.

III Függvények, sorozatok

1. Hozzárendelések, függvények

1. K1 Egy függvény az $A = \{0, 2, 4, 6\}$ halmaz mint értelmezési tartomány minden eleméhez hozzárendeli a nála 1-gyel nagyobb számot. Adjuk meg a függvény értékkészletét!

$\{1, 3, 5, 7\}$.

2. K1 Egy függvény az értelmezési tartomány minden eleméhez hozzárendeli az abszolút értékét. Adjuk meg az értékkészletet, ha az értelmezési tartomány

a) a [0; 1] intervallum; *b)* a [–1; 1[intervallum;
c) a {–1; 1} halmaz; *d)* a {0; 1} halmaz!

a) $[0; 1]$; *b)* $[0; 1]$; *c)* $\{1\}$; *d)* $\{0; 1\}$.

3. K1 Egy függvény az értelmezési tartomány minden eleméhez hozzárendeli az abszolút értékét. Mi lehetett az értelmezési tartomány, ha az értékkészlet

a) a [0; 1] intervallum; *b)* a [–1; 1[intervallum;
c) az {1} halmaz; *d)* a {0; 1} halmaz?

Jelölje A az értelmezési tartományt.

a) Többféle megoldás lehet. Példákat mutatunk: $A = [-1; 1]$ vagy $A = [-1; 0]$ vagy $A = \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right)$. A = {a [–1; 0] halmazból a racionális számok, a $[0; 1]$ intervallumból azok az irracionális számok}.

b) Az értékkészlet nem tartalmazhat negatív számot, ilyen értelmezési tartomány nem lehet.

c) Lehetett $A = \{-1\}$ vagy $A = \{1\}$ vagy $A = \{-1; 1\}$.

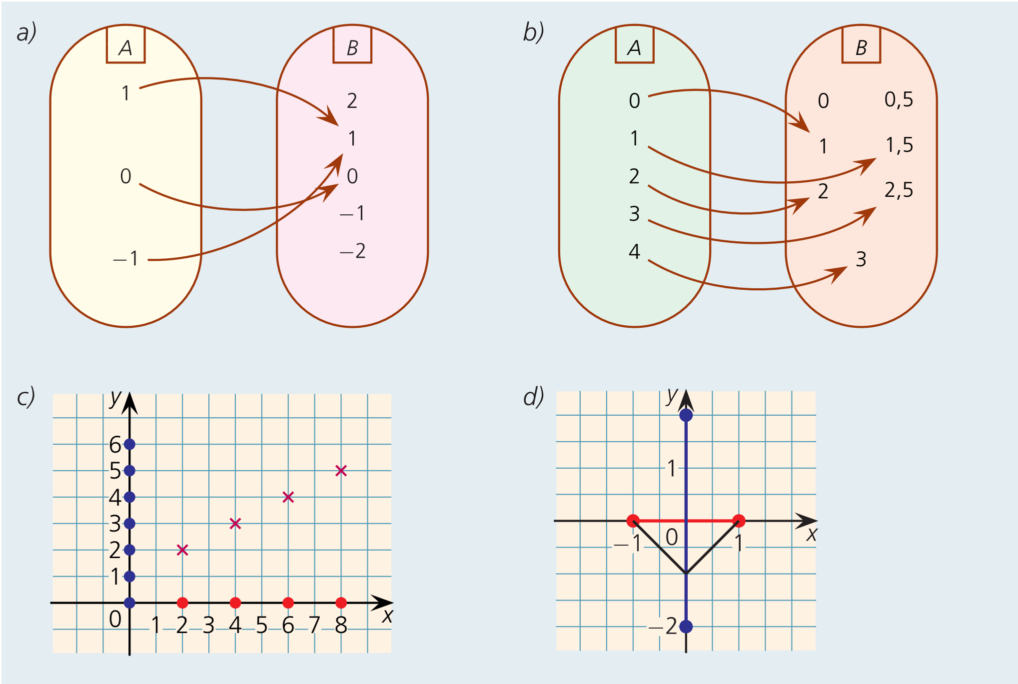
d) Lehetett $A = \{-1; 0\}$ vagy $A = \{0; 1\}$ vagy $A = \{-1; 0; 1\}$.

4. K1 Melyik tekinthető sorozatnak a következő függvények közül?

a) A természetes számokhoz hozzárendeljük az ellentettjüket.
b) Az egész számokhoz hozzárendeljük az ellentettjüket.
c) Minden nemnegatív valós számhoz hozzárendeljük a nála 1-gyel kisebb számot.
d) Minden nemnegatív egész számhoz hozzárendeljük a nála 1-gyel kisebb számot.
e) Minden természetes számhoz hozzárendeljük a (–2)-szeresét.

A sorozat olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok, azaz a természetes számok halmaza. Eszerint sorozatnak tekinthető az *a)*, a *d)* és az *e)* pontban adott függvény.

5. K1 Mely függvényt szemléltettük az ábrákon? Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét és a hozzárendelését!



a) Az értelmezési tartomány: $\{-1; 0; 1\}$; az értékkészlet: $\{0; 1\}$; egy lehetséges hozzárendelés: $f(a) = a^2$, egy másik: $f(a) = |a|$.

b) Az értelmezési tartomány: $\{0; 1; 2; 3; 4\}$; az értékkészlet: $\{1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$; egy lehetséges hozzárendelés: $f(a) = \frac{a}{2} + 1$.

c) Az értelmezési tartomány: $\{2; 4; 6; 8\}$; az értékkészlet: $\{2; 3; 4; 5\}$; egy lehetséges hozzárendelés: $f(a) = \frac{a}{2} + 1$.

d) Az értelmezési tartomány: $[-1; 1]$; az értékkészlet: $[-1; 0]$; egy lehetséges hozzárendelés: $f(a) = |a| - 1$.

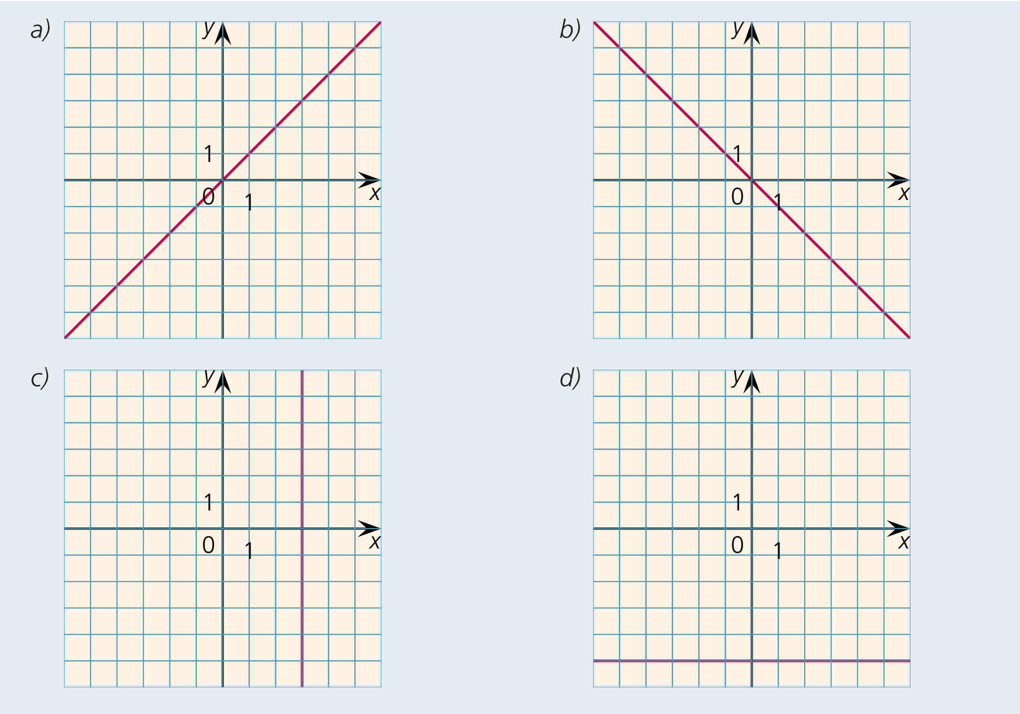
6. K1 Melyik síknegyedbe esnek a következő pontok?

$A(-1;\ 1)$; $B(2;\ -3)$; $C(4;\ 1)$; $D(-1;\ -1)$; $E(-5;\ 1)$; $F(5;\ -1)$.

Az I. negyedbe: *C*; a II. negyedbe: *A*, *E*; a III. negyedbe: *D*; a IV. negyedbe: *B*, *F*.

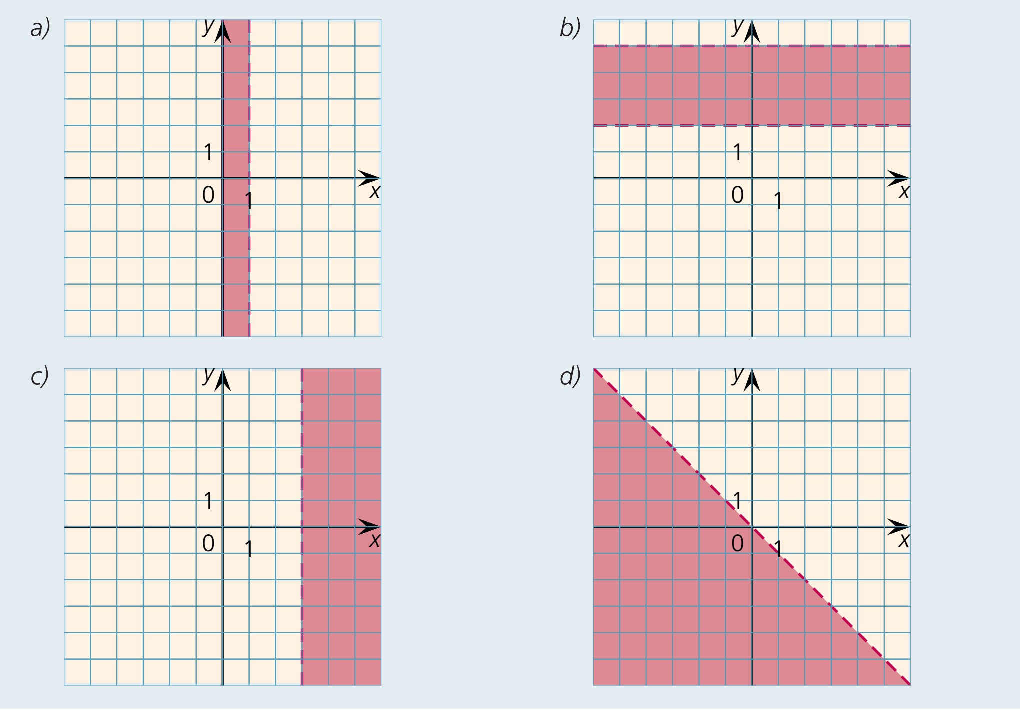
2. Ponthalmazok a koordináta-rendszerben

1. K1 Milyen tulajdonsággal jellemezhetők a koordináta-rendszerben bejelölt pontok?



a) $x = y$; *b)* $x = -y$; *c)* $x = 3$; *d)* $y = -5$.

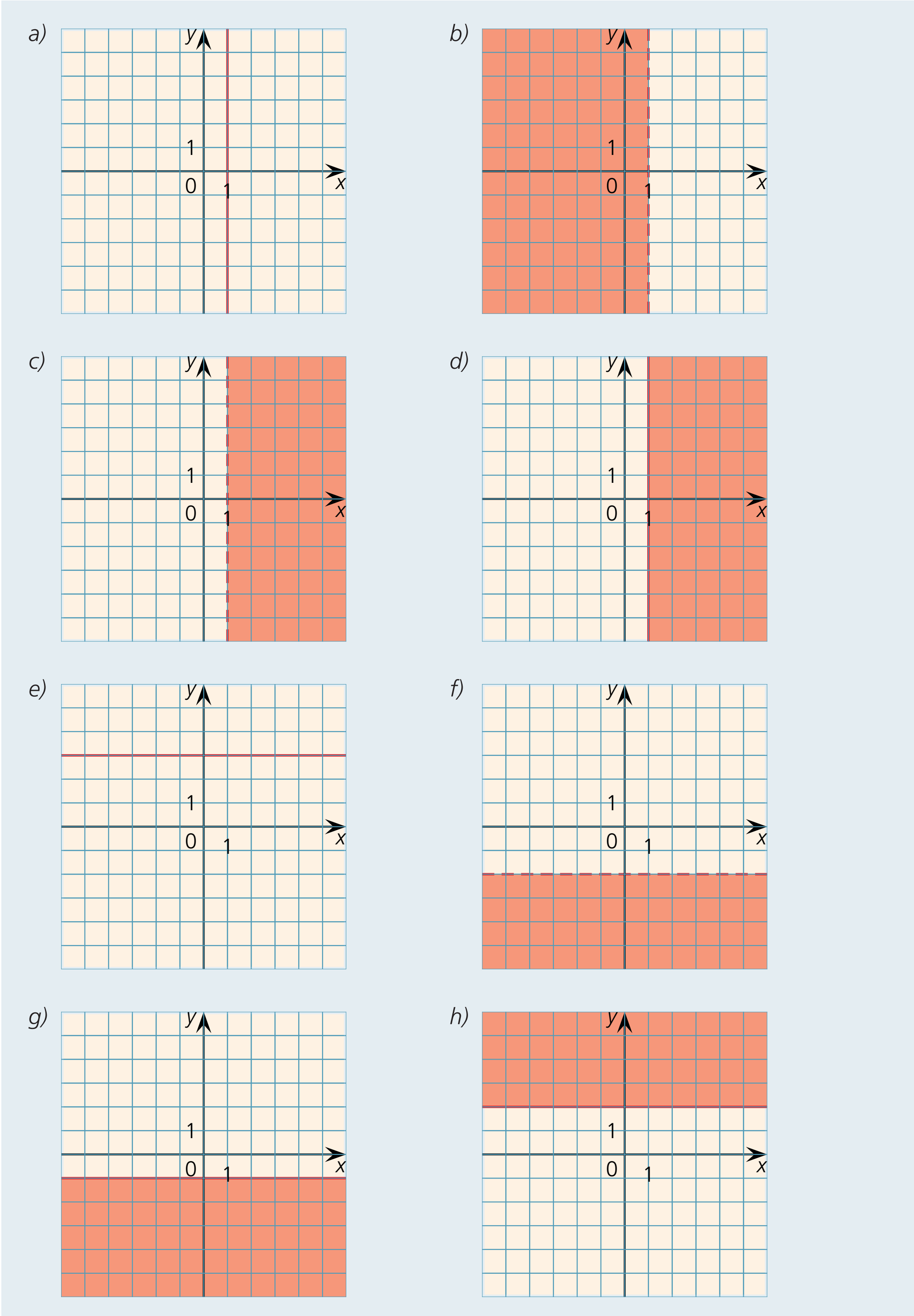
2. K1 Milyen tulajdonsággal jellemezhetők a koordináta-rendszerben bejelölt pontok?



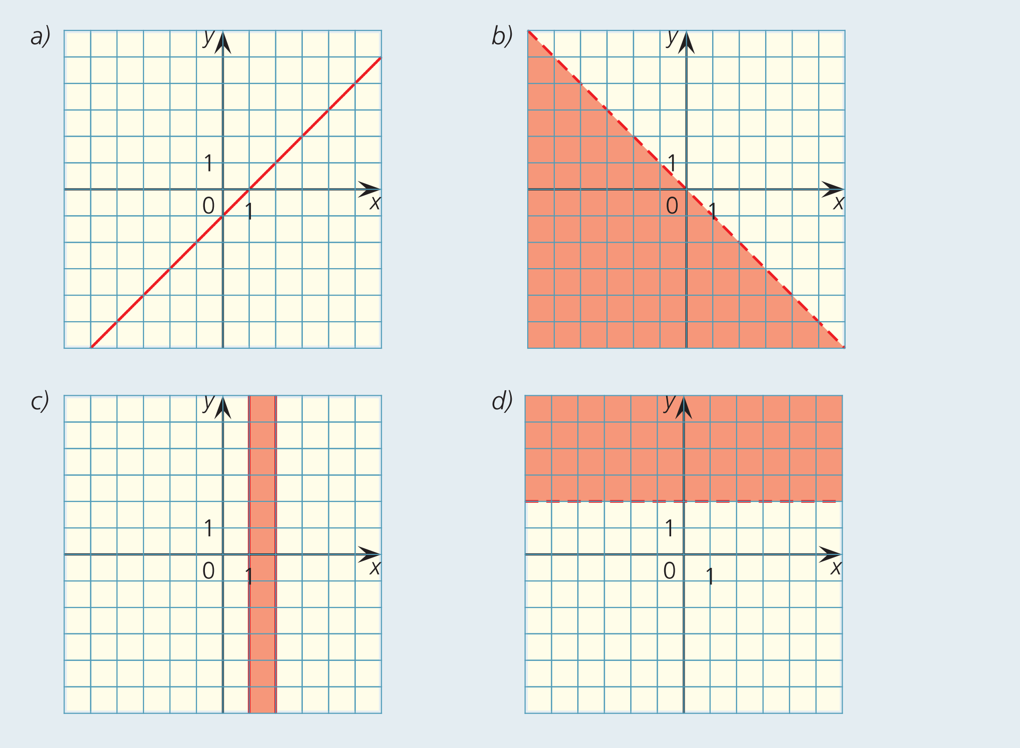
a) $x \in [0; 1[$; *b)* $y \in]2; 5[$; *c)* $x > 3$; *d)* $y < -x$.

3. K1 Jelöljük a koordináta-rendszerben a következő tulajdonságokkal adott pontokat!

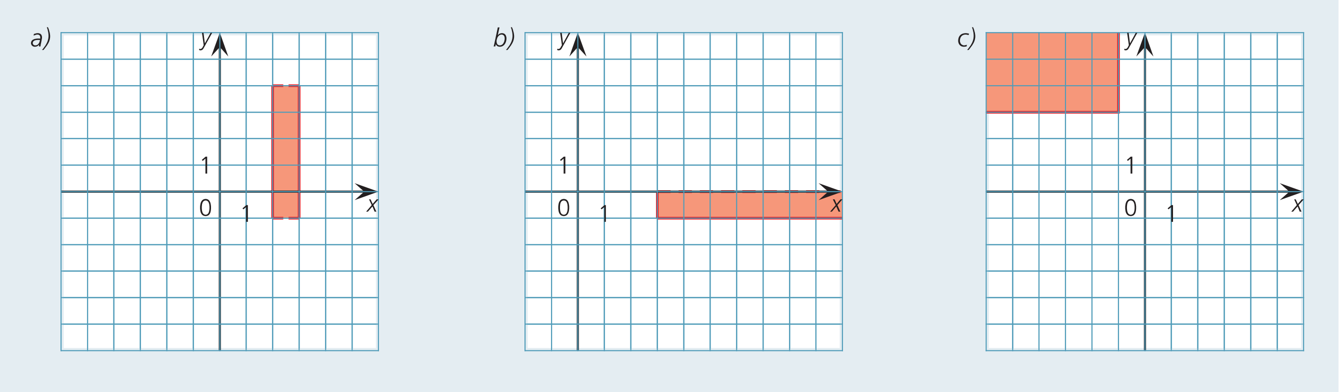
a) $x = 1$; *b)* $x < 1$; *c)* $x > 1$; *d)* $x \geq 1$;
e) $y = 3$; *f)* $y < -2$; *g)* $y \leq -1$; *h)* $y \geq 2$.



4. K1 Jelöljük a koordináta-rendszerben a következő tulajdonságokkal megadott pontokat!
a) $x = y + 1$; *b)* $x < -y$; *c)* $x \in [1; 2]$; *d)* $y > 2$.



5. K1 Jelöljük a koordináta-rendszerben a következő tulajdonságokkal megadott pontokat!
a) $x \in [2; 3]$, $y \in]-1; 4[$;
b) $x \geq 3$, $y \in [-1; 0[$;
c) $x \leq -1$, $y \geq 3$.



3. A lineáris függvény

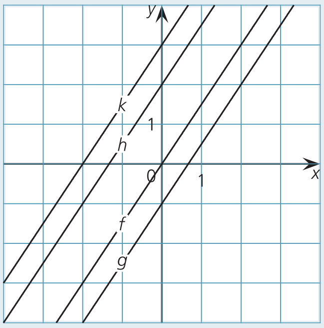
1. K1 Az alábbiak közül mely hozzárendelések határoznak meg lineáris függvényt? Írjuk fel ezek m meredekségét!

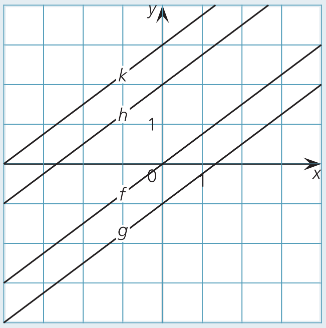
a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto x;$ *b)* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto x - 1;$
c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto 2(x - 1);$ *d)* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto 2x - 1;$
e) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto x(x - 1);$ *f)* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto x + 2x;$
g) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto -1;$ *h)* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f: x \mapsto 0.$

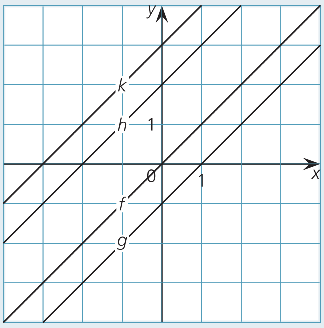
a) lineáris, $m = 1;$ *b)* lineáris, $m = 1;$
c) lineáris, $m = 2;$ *d)* lineáris, $m = 2;$
e) nem lineáris, $x(x - 1) = x^2 - x;$ *f)* lineáris, $m = 3;$
g) lineáris, $m = 0;$ *h)* lineáris, $m = 0.$

2. K1 Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) $f: x \mapsto 1{,}5x;$ $g: x \mapsto 1{,}5x - 1;$ $h: x \mapsto 1{,}5x + 2;$ $k: x \mapsto 1{,}5x + 3.$
b) $f: x \mapsto 0{,}75x;$ $g: x \mapsto 0{,}75x - 1;$ $h: x \mapsto 0{,}75x + 2;$ $k: x \mapsto 0{,}75x + 3.$
c) $f: x \mapsto x;$ $g: x \mapsto x - 1;$ $h: x \mapsto x + 2;$ $k: x \mapsto x + 3.$

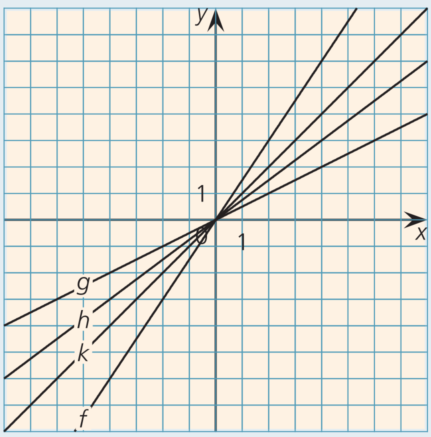
a)


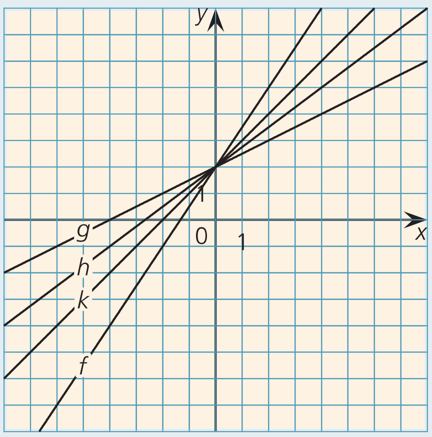
b)


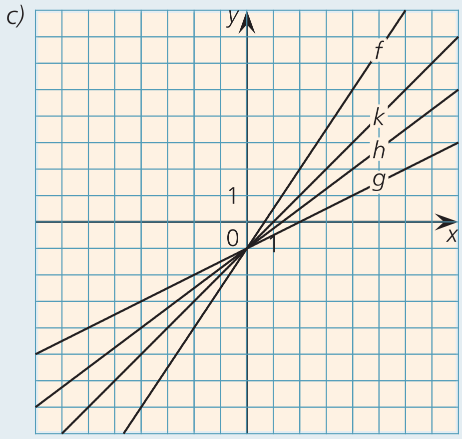
c)


3. K1 Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) $f: x \mapsto 1{,}5x;$ $g: x \mapsto 0{,}5x;$ $h: x \mapsto 0{,}75x;$ $k: x \mapsto x.$
b) $f: x \mapsto 1{,}5x + 2;$ $g: x \mapsto 0{,}5x + 2;$ $h: x \mapsto 0{,}75x + 2;$ $k: x \mapsto x + 2.$
c) $f: x \mapsto 1{,}5x - 1;$ $g: x \mapsto 0{,}5x - 1;$ $h: x \mapsto 0{,}75x - 1;$ $k: x \mapsto x - 1.$

a)


b)




4. K2 Adjuk meg a következő lineáris függvények meredekségét és tengelymetszeteit, majd ábrázoljuk őket koordináta-rendszerben!

a) $f: x \mapsto 2x - 3$; *b)* $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$; *c)* $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x - 1)$;

d) $f: x \mapsto 0{,}75x + 3$; *e)* $f: x \mapsto -2(x - 1)$; *f)* $f: x \mapsto -0{,}6x - 0{,}6$;

g) $f: x \mapsto 1{,}5x$; *h)* $f: x \mapsto -3(x + 1)$; *i)* $f: x \mapsto 3x - 3$.

a) $m = 2$, a tengelymetszetek: $(0; -3)$ és $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

b) $m = \frac{1}{2}$, a tengelymetszetek: $(0; 2)$ és $(-4; 0)$.

c) $m = \frac{1}{2}$, a tengelymetszetek: $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ és $(1; 0)$.

d) $m = 0{,}75$, a tengelymetszetek: $(0; 3)$ és $(-4; 0)$.

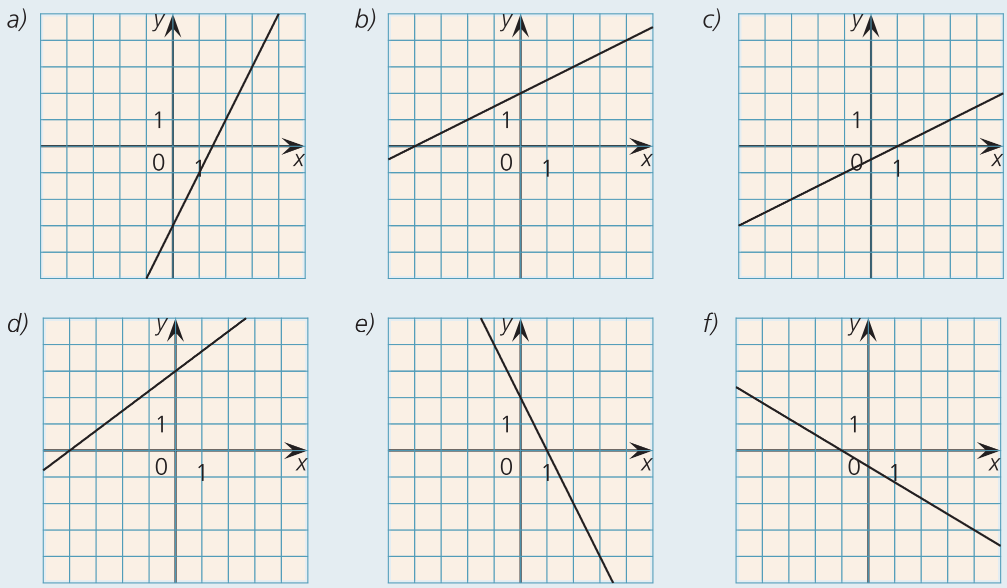
e) $m = -2$, a tengelymetszetek: $(0; 2)$ és $(1; 0)$.

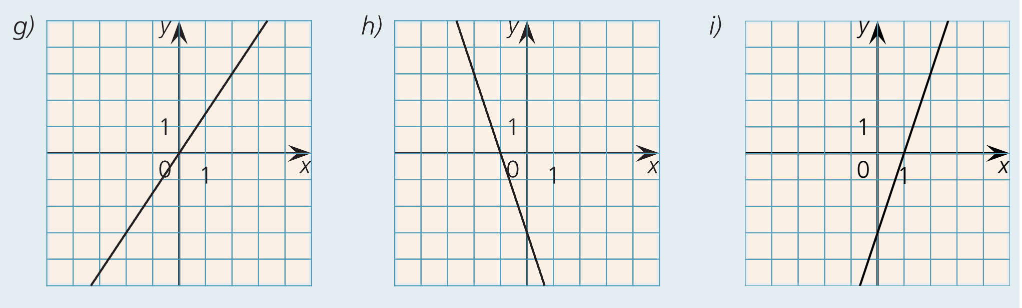
f) $m = -0{,}6$, a tengelymetszetek: $(0; -0{,}6)$ és $(-1; 0)$.

g) $m = 1{,}5$, a tengelymetszetek: $(0; 0)$.

h) $m = -3$, a tengelymetszetek: $(0; -3)$ és $(-1; 0)$.

i) $m = 3$, a tengelymetszetek: $(0; -3)$ és $(1; 0)$.





5. K2 Határozzuk meg, hogy melyek azok a lineáris függvények, amelyek tengelymetszete:
a) (0; 1) és (1; 0); *b)* (0; 2) és (–1; 0); *c)* (0; –1) és (2; 0); *d)* (0; 1) és (–2; 0)!

a) $m=-1,\ b=1,\ f(x)=-x+1;$ *b)* $m=2,\ b=2,\ f(x)=2x+2;$

c) $m=\frac{1}{2},\ b=-1,\ f(x)=\frac{1}{2}x-1;$ *d)* $m=\frac{1}{2},\ b=1,\ f(x)=\frac{1}{2}x+1.$

6. K1 Mely összefüggések határoznak meg lineáris függvényt?
a) Egy időtartamhoz hozzárendeljük azt az utat, amelyet egy autó azalatt az idő alatt megtesz.
b) Egy időtartamhoz hozzárendeljük azt az utat, amelyet egy egyenletes sebességgel haladó autó azalatt az idő alatt megtesz.
c) Egy adott áru darabszámához hozzárendeljük az áruért fizetendő összeget.
d) Egy adott évhez hozzárendeljük az abban az évben Magyarországon születettek számát.
e) Egy adott naphoz hozzárendeljük az aznap Magyarországon mért legmagasabb hőmérsékletet.
f) Egy adott év minden egyes napjához hozzárendeljük az adott év napjai számát.

a) Nem lineáris, mert nem feltétlenül egyenletes az autó sebessége.
b) Lineáris, mert az autó sebessége egyenletes. Ez éppen azt jelenti, hogy a megtett út az eltelt idővel arányosan változik.
c) Lineáris. A kifizetendő összeg az áru darabszámával arányosan változik.
d) Nem lineáris.
e) Nem lineáris.
f) Lineáris, konstans.

7. K2 Milyen *y*, illetve *x* tengely irányú eltolással kaphatók
a) az $f:x\mapsto x$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto x+1;$ $h:x\mapsto x-3;$ $k:x\mapsto x+2;$
b) az $f:x\mapsto 2x$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto 2x+1;$ $h:x\mapsto 2x-3;$ $k:x\mapsto 2x+2;$
c) az $f:x\mapsto 2x$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto 2(x+1);$ $h:x\mapsto 2(x-3);$ $k:x\mapsto 2(x+2);$
d) az $f:x\mapsto -2x$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto -2x+1;$ $h:x\mapsto -2x-3;$ $k:x\mapsto -2x+2;$
e) az $f:x\mapsto -2x$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto -2(x+1);$ $h:x\mapsto -2(x-3);$
$k:x\mapsto -2(x+2)$
függvények grafikonjai?

Az értékeket a tengelymetszetekből olvashatjuk le:
a) *y* tengellyel párhuzamosan $1;-3;2,$ *x* tengellyel párhuzamosan $-1;3;-2.$
b) *y* tengellyel párhuzamosan $1;-3;2,$ *x* tengellyel párhuzamosan $-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-1.$
c) *y* tengellyel párhuzamosan $2;-6;4,$ *x* tengellyel párhuzamosan $-1;3;-2.$
d) *y* tengellyel párhuzamosan $1;-3;2,$ *x* tengellyel párhuzamosan $\frac{1}{2};-\frac{3}{2};1.$
e) *y* tengellyel párhuzamosan $-2;6;-4,$ *x* tengellyel párhuzamosan $-1;3;-2.$

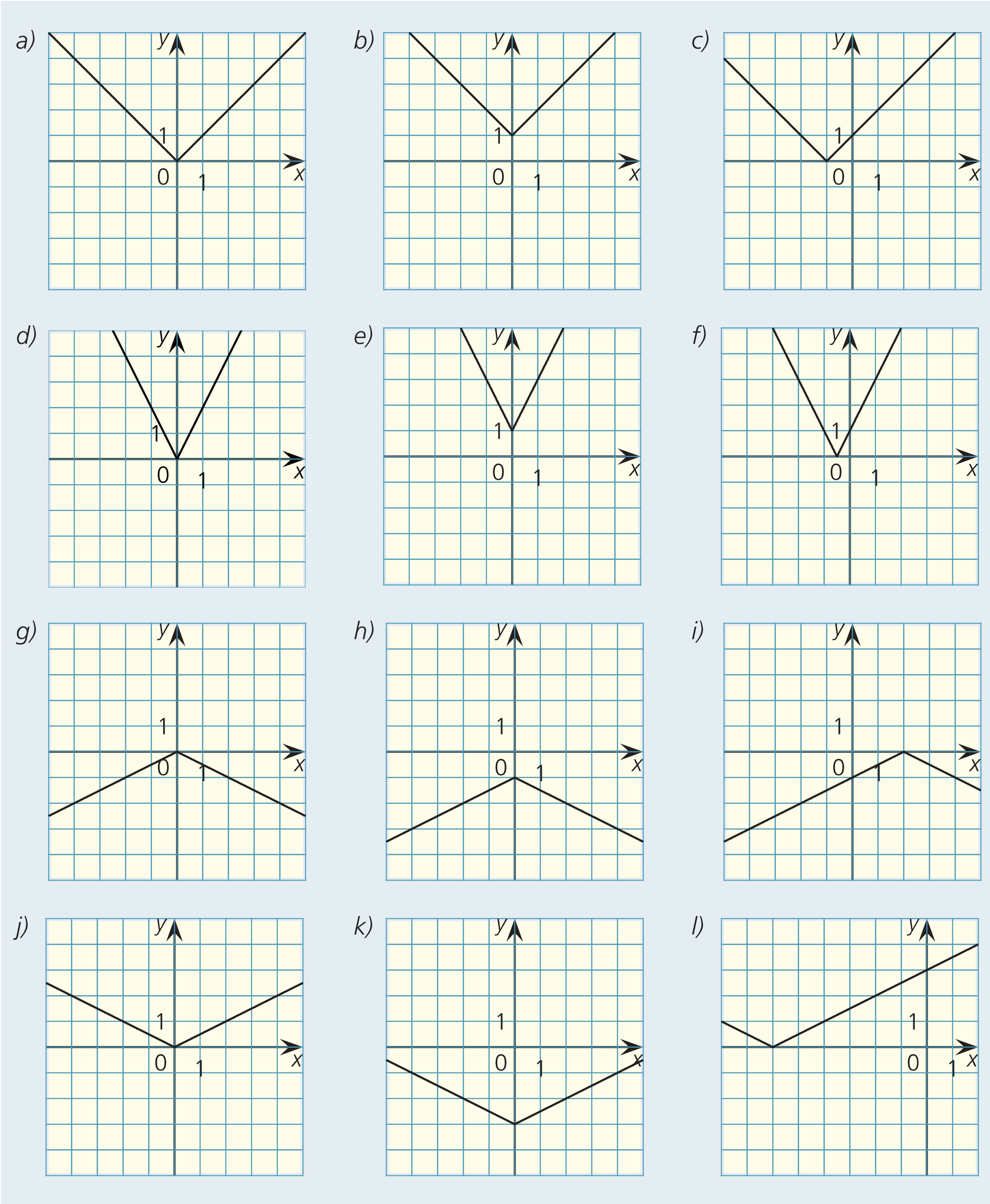
4. Az abszolútérték-függvény

1. K1 Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő abszolútérték-függvényeket! Adjuk meg a kapott abszolútérték-függvények grafikonjának csúcspontját a koordinátáikkal!

a) $x \mapsto |x|$; *b)* $x \mapsto |x|+1$; *c)* $x \mapsto |x+1|$; *d)* $x \mapsto |2x|$;

e) $x \mapsto |2x|+1$; *f)* $x \mapsto |2x+1|$; *g)* $x \mapsto -\left|\frac{1}{2}x\right|$; *h)* $x \mapsto -\left|\frac{1}{2}x\right|-1$;

i) $x \mapsto -\left|\frac{1}{2}x-1\right|$; *j)* $x \mapsto \left|-\frac{1}{2}x\right|$; *k)* $x \mapsto \left|-\frac{1}{2}x\right|-3$; *l)* $x \mapsto \left|-\frac{1}{2}x-3\right|$.

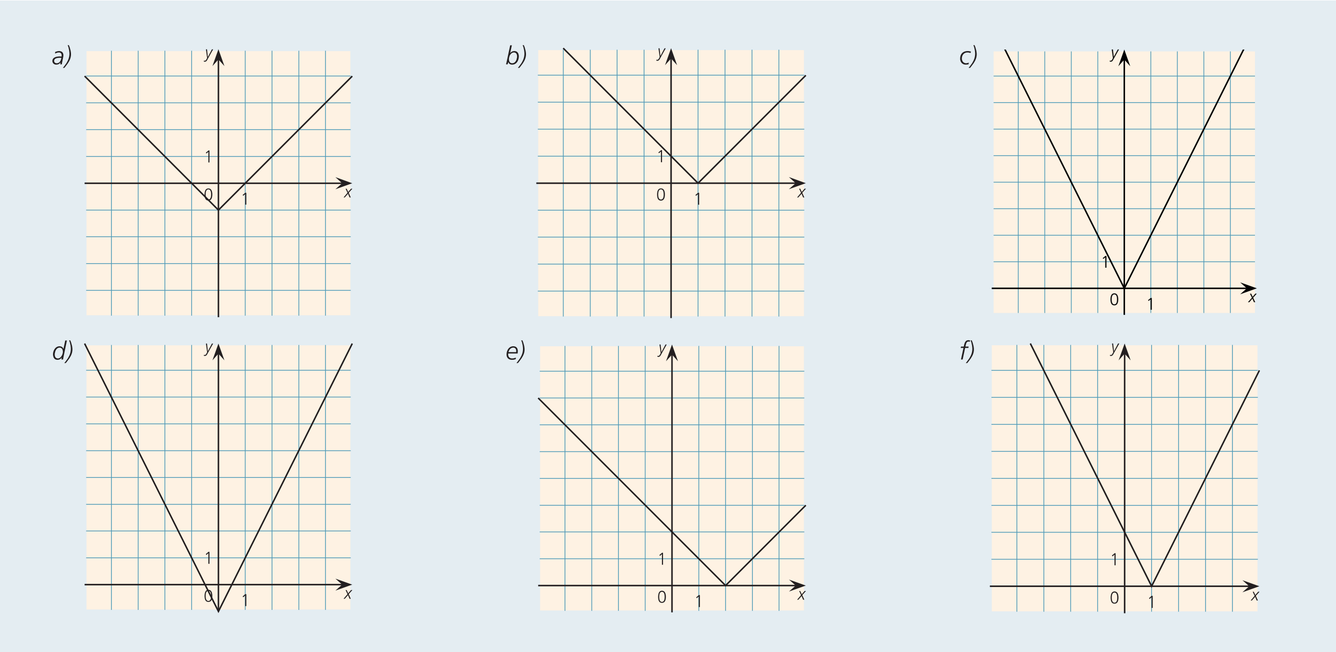


A csúcspontok koordinátái:

a) (0; 0); *b)* (0; 1); *c)* (–1; 0); *d)* (0; 0); *e)* (0; 1); *f)* $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$;

g) (0; 0); *h)* (0; –1); *i)* (2; 0); *j)* (0; 0); *k)* (0; –3); *l)* (–6; 0).

2. E1 Mely abszolútérték-függvények grafikonját láthatjuk az ábrákon?



a) $|x|-1$; *b)* $|x-1|$; *c)* $2|x|$; *d)* $2|x|-1$; *e)* $|x-2|$; *f)* $|2x-2|$.

3. K2 Milyen *y* vagy *x* tengely irányú eltolással kaphatók

a) az $f:x\mapsto|x|$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto|x|+1$; $h:x\mapsto|x|-3$; $k:x\mapsto|x|+2$;
b) az $f:x\mapsto|x|$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto|x+1|$; $h:x\mapsto|x-3|$; $k:x\mapsto|x+2|$;
c) az $f:x\mapsto 2|x|$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto 2|x|+1$; $h:x\mapsto 2|x|-3$; $k:x\mapsto 2|x|+2$;
d) az $f:x\mapsto|2x|$ függvény grafikonjából a $g:x\mapsto|2x+1|$; $h:x\mapsto|2x-3|$; $k:x\mapsto|2x+2|$

függvények grafikonjai?

Adjuk meg a kapott abszolútérték-függvények grafikonjainak csúcspontjait a koordinátáikkal!

a) A *g* függvényt *y* irányú 1 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(0; 1)$.
A *h* függvényt *y* irányú -3 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(0; -3)$.
A *k* függvényt *y* irányú 2 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(0; 2)$.

b) A *g* függvényt *x* irányú -1 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(-1; 0)$.
A *h* függvényt *x* irányú 3 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(3; 0)$.
A *k* függvényt *x* irányú -2 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(-2; 0)$.

c) A *g* függvényt *y* irányú 1 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(0; 1)$.
A *h* függvényt *y* irányú -3 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(0; -3)$.
A *k* függvényt *y* irányú 2 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(0; 2)$.

d) A *g* függvényt *x* irányú $-\frac{1}{2}$ egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
A *h* függvényt *x* irányú $\frac{3}{2}$ egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.
A *k* függvényt *x* irányú -1 egységnyi eltolással kapjuk; a csúcspontja $(-1; 0)$.

4. K2 Milyen arányú *y*, illetve *x* tengely irányú nyújtás (összenyomás) viszi az $f:x\mapsto|x|$ függvény grafikonját a $g:x\mapsto|2x|$; $h:x\mapsto|3x|$; $k:x\mapsto\frac{1}{2}|x|$ függvények grafikonjába?

y irányában $2, 3, \frac{1}{2}$, *x* irányában $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$ arányú nyújtás.

5. K2 Az abszolútérték-függvény grafikonján az alábbi transzformációkat hajtottuk végre. Állapítsuk meg, hogy melyik függvényt kaptuk!

a) Az x tengellyel párhuzamosan eltoltuk 2 egységgel, majd az x tengelytől számítva, az y tengellyel párhuzamosan a 2-szeresére nyújtottuk.

b) Az x tengelytől számítva a felére nyomtuk össze, majd az y tengellyel párhuzamosan eltoltuk –1 egységgel.

a) Az első lépés után az $x \mapsto |x-2|$ függvényt kaptuk, a második után az $x \mapsto 2|x-2|$ függvényt.

b) Az első lépésben az $x \mapsto \left|\frac{1}{2}x\right|$ függvényt kaptuk, a második után az $x \mapsto \left|\frac{1}{2}x\right| - 1$ függvényt.

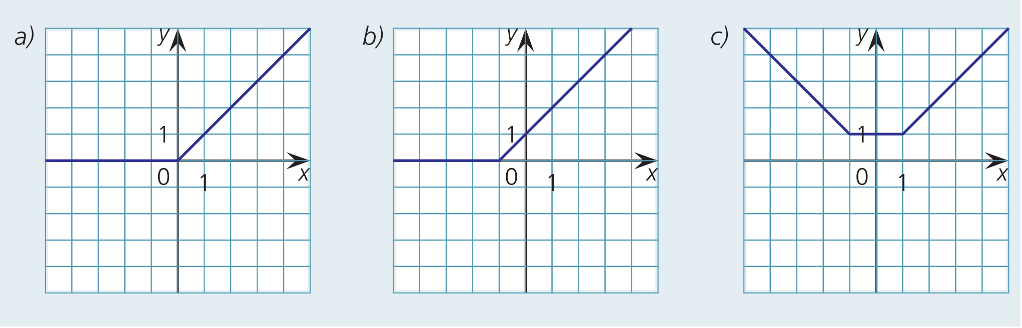
6. E1 Készítsünk értéktáblázatot, majd ábrázoljuk a következő abszolútérték-függvényeket!

a) $a(x) = \dfrac{|x|+x}{2}$;

b) $b(x) = \dfrac{|x+1|+x+1}{2}$;

c) $c(x) = \dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$a(x)$	0	0	0	0	0	1	2	3	4
$b(x)$	0	0	0	0	1	2	3	4	5
$c(x)$	4	3	2	1	1	1	2	3	4



5. Az $f\colon x \mapsto x^2$ függvény

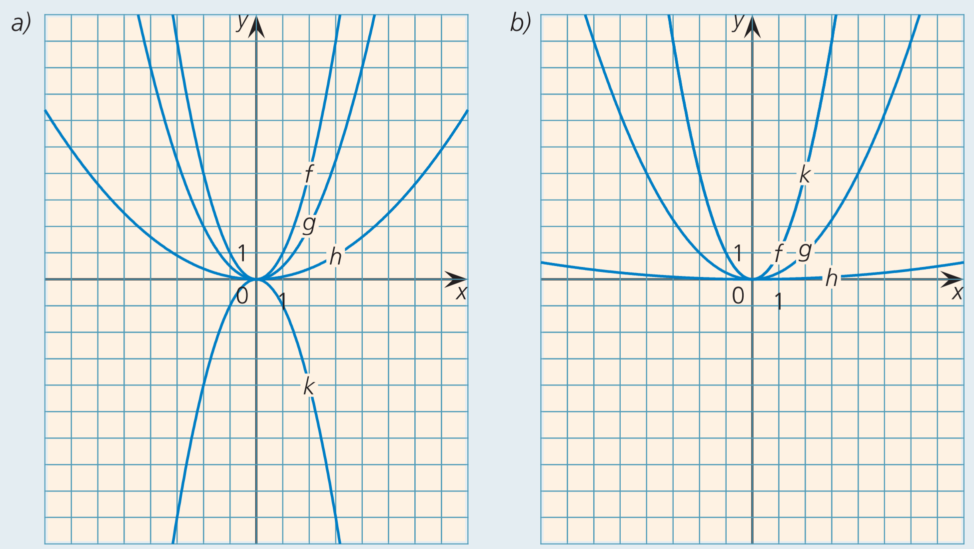
1. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben! Fogalmazzuk meg, hogy a g, h, k függvények grafikonját milyen transzformációval kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából!

a) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$; $h: x \mapsto 0{,}1x^2$; $k: x \mapsto -x^2$;

b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto \left(\frac{1}{2}x\right)^2$; $h: x \mapsto (0{,}1x)^2$; $k: x \mapsto (-x)^2$.

a) g: y tengely irányú, $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás; h: y tengely irányú, 0,1-szeresre változtatás; k: y tengely irányú, –1-szeresre változtatás, vagyis az x tengelyre történő tükrözés.

b) g: y tengely irányú, $\frac{1}{4}$-szeresre változtatás; h: y tengely irányú, 0,01-szorosra változtatás; k: f-fel azonos.



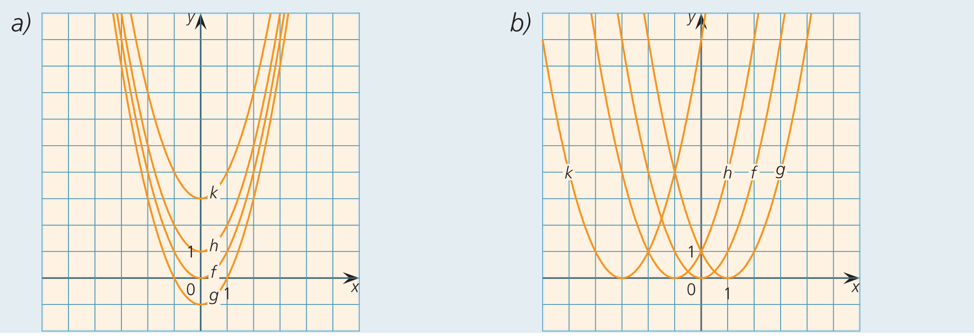
2. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben! Fogalmazzuk meg, hogy a g, h, k függvények grafikonját milyen transzformációval kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából!

a) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto x^2 - 1$; $h: x \mapsto x^2 + 1$; $k: x \mapsto x^2 + 3$;

b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto (x-1)^2$; $h: x \mapsto (x+1)^2$; $k: x \mapsto (x+3)^2$.

a) g: y tengellyel párhuzamosan –1-gyel eltoljuk. h: y tengellyel párhuzamosan 1-gyel eltoljuk. k: y tengellyel párhuzamosan 3-mal eltoljuk.

b) g: x tengellyel párhuzamosan 1-gyel eltoljuk. h: x tengellyel párhuzamosan –1-gyel eltoljuk. k: tengellyel párhuzamosan –3-mal eltoljuk.



3. K2 Mely függvények grafikonját kapjuk meg, ha az x^2 függvény grafikonján a következő transzformációkat hajtjuk végre?

a) Az y tengely mentén $+3$-mal eltoljuk. *b)* Az x tengely irányában 3-szorosára nyújtjuk.
c) Az x tengely mentén -2-vel eltoljuk. *d)* Az y tengely mentén $\frac{1}{2}$-szeresére összenyomjuk.

a) x^2+3; *b)* $\left(\frac{1}{3}x\right)^2$; *c)* $(x+2)^2$; *d)* $\frac{1}{2}x$.

4. K1 Az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjának milyen eltolásával kaphatók a következő függvények grafikonjai? Határozzuk meg a parabolák csúcspontjainak koordinátáit!

a) $f(x) = x^2 - 3$; *b)* $f(x) = x^2 + 1$; *c)* $f(x) = (x+3)^2$; *d)* $f(x) = (x-2)^2$;
e) $f(x) = (x+1)^2 - 1$; *f)* $f(x) = (x+3)^2 + 3$; *g)* $f(x) = (x-2)^2 + 1$; *h)* $f(x) = (x-4)^2 - 1$.

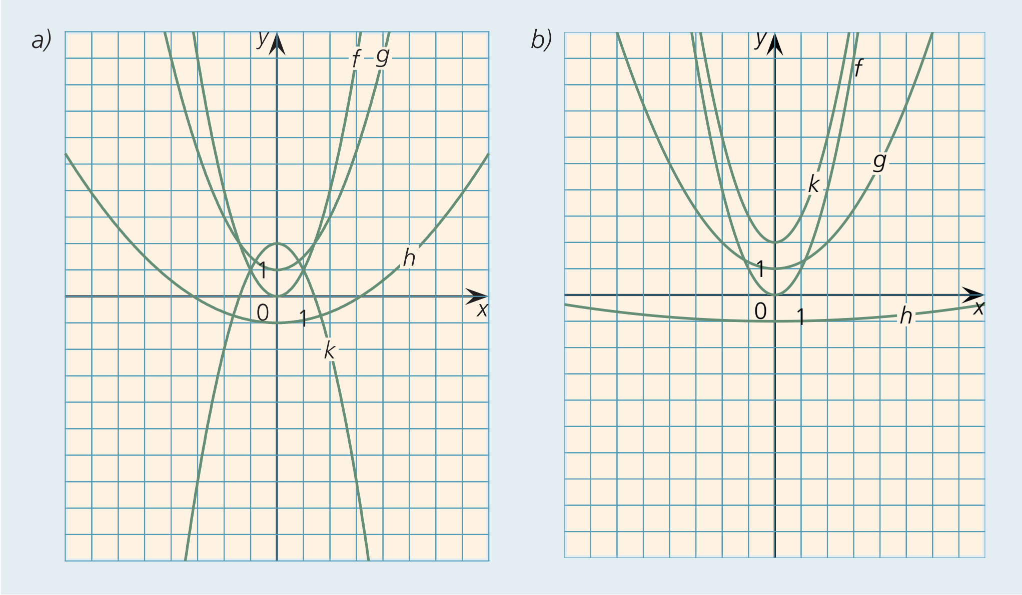
a) y tengellyel párhuzamosan -3 egységgel $(0; -3)$;
b) y tengellyel párhuzamosan 1 egységgel $(0; 1)$;
c) x tengellyel párhuzamosan -3 egységgel $(-3; 0)$;
d) x tengellyel párhuzamosan 2 egységgel $(2; 0)$;
e) x tengellyel párhuzamosan -1, y tengellyel párhuzamosan -1 egységgel $(-1; -1)$;
f) x tengellyel párhuzamosan -3, y tengellyel párhuzamosan 3 egységgel $(-3; 3)$;
g) x tengellyel párhuzamosan 2, y tengellyel párhuzamosan 1 egységgel $(2; 1)$;
h) x tengellyel párhuzamosan 4, y tengellyel párhuzamosan -1 egységgel $(4; -1)$.

6. A másodfokú függvény összetett transzformációi

1. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben! Fogalmazzuk meg, hogy a g, h, k függvények grafikonját milyen transzformációval kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából!

a) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 1$; $h: x \mapsto 0{,}1x^2 - 1$; $k: x \mapsto -x^2 + 2$;

b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1$; $h: x \mapsto (0{,}1x)^2 - 1$; $k: x \mapsto (-x)^2 + 2$.



a) g: y tengely mentén $\frac{1}{2}$-szeresre változtatjuk és az y tengellyel párhuzamosan 1-gyel eltoljuk;

h: y tengely mentén 0,1-szeresre változtatjuk és az y tengellyel párhuzamosan -1-gyel eltoljuk;

k: *y* tengely irányában –1-szeresre változtatjuk, vagyis tükrözzük az *x* tengelyre, és az *y* tengellyel párhuzamosan 2-vel eltoljuk.

b) *g*: *y* tengely irányában $\frac{1}{4}$-szeresre változtatjuk és az *y* tengellyel párhuzamosan 1-gyel eltoljuk;
h: *y* tengely irányában 0,01-szorosra változtatjuk és az *y* tengellyel párhuzamosan –1-gyel eltoljuk;
k: *y* tengellyel párhuzamosan 2-vel eltoljuk.

2. K2 *a)* Hány *y* tengelymetszete lehet egy parabolának?
b) Hány *y* tengelymetszete lehet általában egy függvénynek?

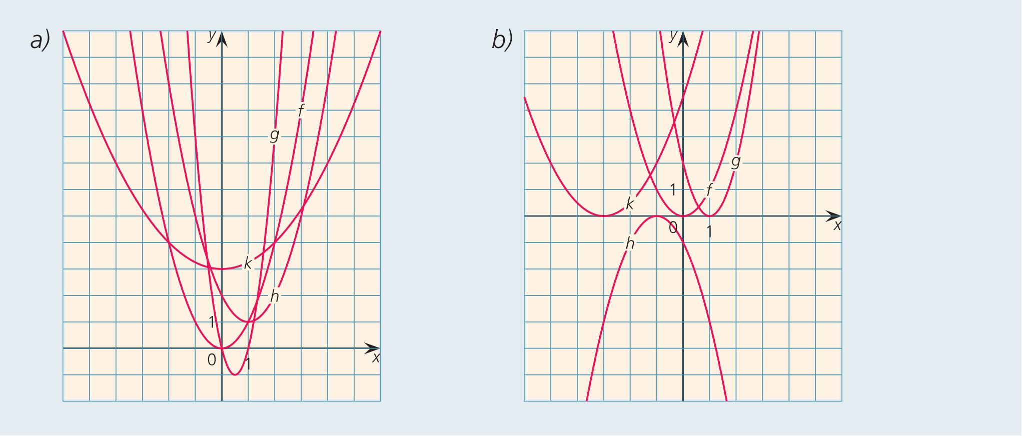
Egy *f* függvény *y* tengelymetszete a $(0; f(0))$ pont. Mivel a 0-hoz egyetlen függvényérték tartozik, ez egyetlen pont lehet.
Ha a 0 nem eleme az értelmezési tartománynak, akkor nincs tengelymetszet. (Például: minden pozitív számhoz hozzárendeljük a nála 1-gyel kisebb számot.)
a) A parabolának mindig egyetlen *y* tengelymetszete van.
b) Egy *f* függvénynek 0 vagy 1 *y* tengelymetszete lehet.

3. E1 Ábrázoljuk a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben! Fogalmazzuk meg, hogy a *g*, *h*, *k* függvények grafikonját milyen transzformációval kaphatjuk meg az *f* függvény grafikonjából!

a) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto (2x-1)^2 - 1$; $h: x \mapsto (-x+1)^2 + 1$; $k: x \mapsto \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 3$;

b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto 2(x-1)^2$; $h: x \mapsto -(x+1)^2$; $k: x \mapsto \frac{1}{2}(x+3)^2$.

a) *g*: *x* tengellyel párhuzamosan $\frac{1}{2}$-del eltoljuk, *y* tengely irányában 4-szeresre változtatjuk, majd az *y* tengellyel párhuzamosan –1-gyel eltoljuk; *h*: *x* tengellyel párhuzamosan eltoljuk 1-gyel, majd az *y* tengellyel párhuzamosan 1-gyel eltoljuk; *k*: *y* tengely irányában $\frac{1}{4}$-szeresre változtatjuk, majd az *y* tengellyel párhuzamosan 3-mal eltoljuk.
b) *g*: *x* tengellyel párhuzamosan 1-gyel eltoljuk, majd az *y* tengely irányában 2-szeresre változtatjuk;
h: *x* tengellyel párhuzamosan –1-gyel eltoljuk, az *y* tengely irányában –1-szeresre változtatjuk;
k: *x* tengellyel párhuzamosan –3-mal eltoljuk, az *y* tengely irányában $\frac{1}{2}$-szeresre változtatjuk.



4. E1 Adjuk meg a következő másodfokú függvények grafikonjának csúcspontjait koordinátáikkal, illetve a tengelymetszeteiket!

a) $f: x \mapsto (2x-1)^2 - 1$; *b)* $f: x \mapsto (-x-1)^2 - 1$;

c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2$; *d)* $f: x \mapsto 2(x-1)^2 - 2$;

e) $f: x \mapsto -(x-1)^2$; *f)* $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$.

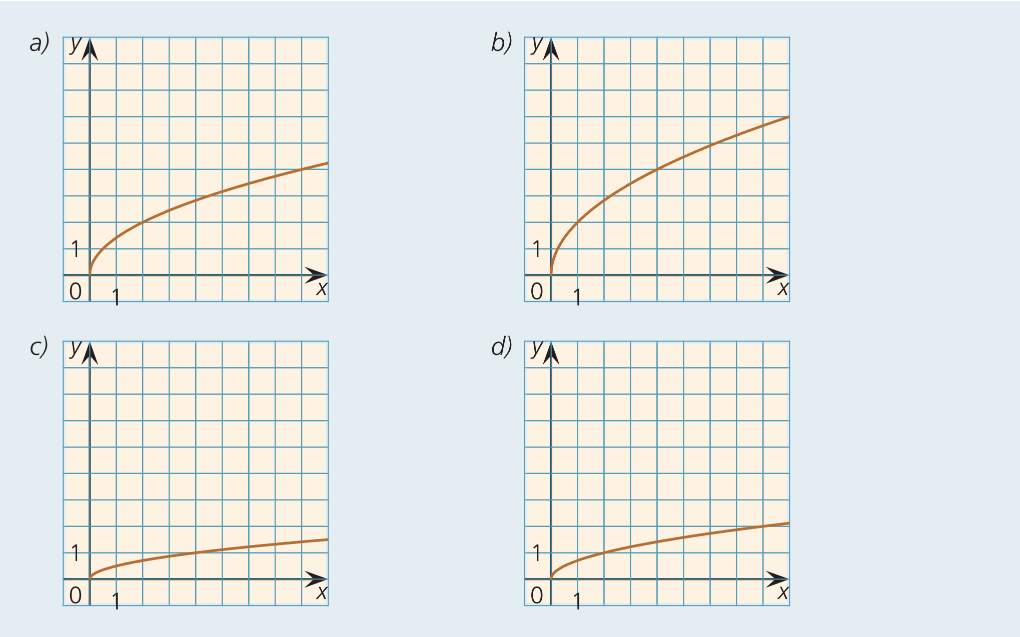
a) A csúcspont koordinátái: $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$; az y tengelymetszet: $(0; 0)$; az x tengelymetszetek: $(0; 0)$; $(1; 0)$.
b) A csúcspont koordinátái: $(-1; -1)$; az y tengelymetszet: $(0; 0)$; az x tengelymetszetek: $(0; 0)$; $(-2; 0)$.
c) A csúcspont koordinátái: $(0; -2)$; az y tengelymetszet: $(0; -2)$; az x tengelymetszetek: $(2; 0)$; $(-2; 0)$.
d) A csúcspont koordinátái: $(1; -2)$; az y tengelymetszet: $(0; -2)$; az x tengelymetszetek: $(0; 0)$; $(2; 0)$.
e) A csúcspont koordinátái: $(1; 0)$; az y tengelymetszet: $(0; -1)$; az x tengelymetszet: $(1; 0)$.
f) A csúcspont koordinátái: $(1; 2)$; az y tengelymetszet: $(0; 2{,}5)$; az x tengelyt nem metszi, mert a csúcspontja az I. síknegyedbe esik, és felfele állnak a szárai.

7. További függvények

1. K1 Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő hozzárendeléseket! Készítsünk értéktáblázatokat!

a) $a: x \mapsto \sqrt{2x}$; *b)* $b: x \mapsto 2\sqrt{x}$; *c)* $c: x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x}$; *d)* $d: x \mapsto \sqrt{\frac{1}{2}x}$.

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonjának milyen transzformációjával kapjuk meg ezeknek a függvényeknek a grafikonját?



a) x tengely irányú $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás. *b)* y tengely irányú 2-szeresre változtatás.

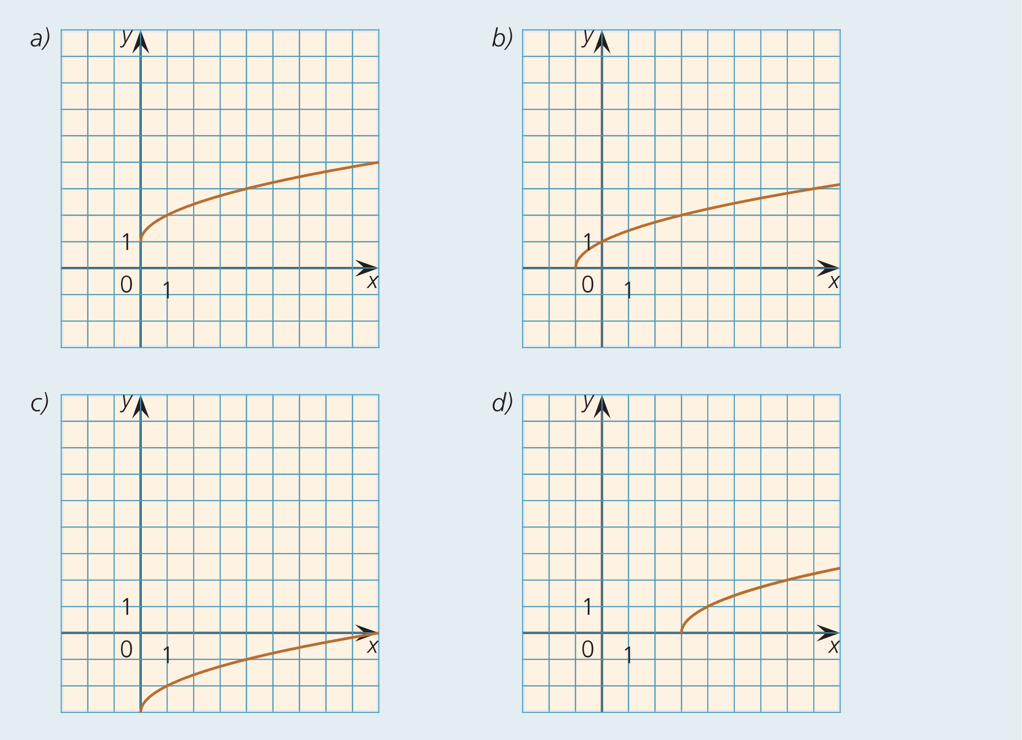
c) y tengely irányú $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás. *d)* x tengely irányú 2-szeresre változtatás.

2. K1 Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő hozzárendeléseket! Készítsünk értéktáblázatokat!

a) $a: x \mapsto \sqrt{x} + 1$; *b)* $b: x \mapsto \sqrt{x+1}$; *c)* $c: x \mapsto \sqrt{x} - 3$; *d)* $d: x \mapsto \sqrt{x-3}$.

Mindegyik függvény esetében adjuk meg a lehető legbővebb értelmezési tartományt!

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonjának milyen transzformációjával kapjuk meg ezeknek a függvényeknek a grafikonját?



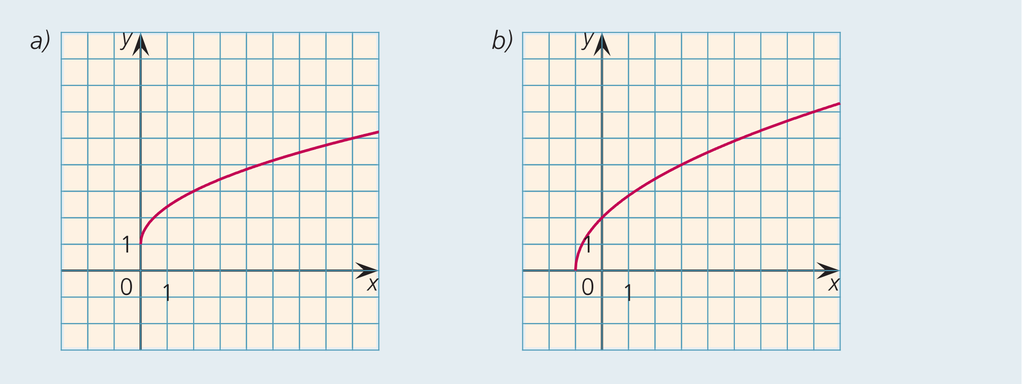
a) $x \geq 0$; *y* tengely mentén 1 egységgel történő eltolás.
b) $x \geq -1$; *x* tengely mentén (-1) egységgel történő eltolás.
c) $x \geq 0$; *y* tengely mentén (-3) egységgel történő eltolás.
d) $x \geq 3$; *x* tengely mentén 3 egységgel történő eltolás.

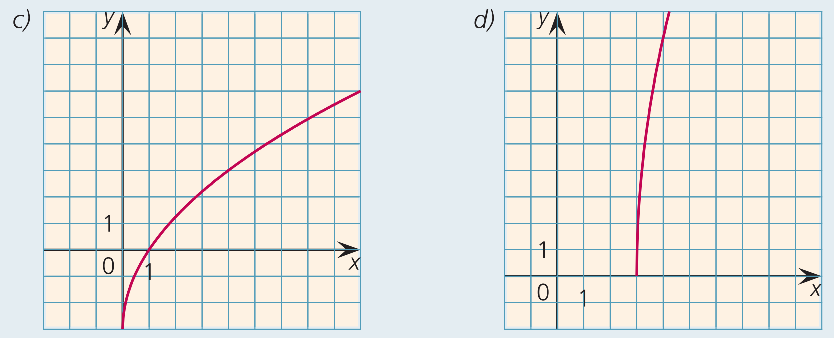
3. E1 Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő hozzárendeléseket! Készítsünk értéktáblázatokat!

a) $a: x \mapsto \sqrt{2x} + 1$; *b)* $b: x \mapsto 2\sqrt{x+1}$; *c)* $c: x \mapsto \sqrt{9x} - 3$; *d)* $d: x \mapsto 9\sqrt{x-3}$.

Mindegyik függvény esetében adjuk meg a lehető legbővebb értelmezési tartományt!

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonjának milyen transzformációjával kapjuk meg ezeknek a függvényeknek a grafikonját?

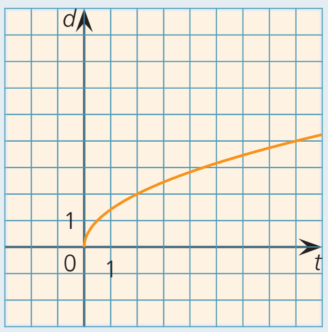




a) $x \geq 0$; x tengely irányban $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás (vagy y tengely irányban $\sqrt{2}$-szeresre változtatás, mert $\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$), majd y tengely mentén 1 egységgel történő eltolás.
b) $x \geq -1$; x tengely mentén (-1) egységgel történő eltolás, majd y tengely irányban 2-szeresre változtatás.
c) $x \geq 0$; x tengely irányban $\frac{1}{9}$-szeresre való változtatás (vagy y tengely irányban 3-szorosra változtatás), majd y tengely mentén (-3) egységgel történő eltolás.
d) $x \geq 3$; x tengely mentén 3 egységgel történő eltolás, majd y tengely irányban 9-szeresre történő változtatás.

4. K2 A g függvény a t területű négyzet területéhez hozzárendeli a négyzet átlójának hosszát. Készítsünk értéktáblázatot! Ábrázoljuk a g függvényt koordináta-rendszerben!

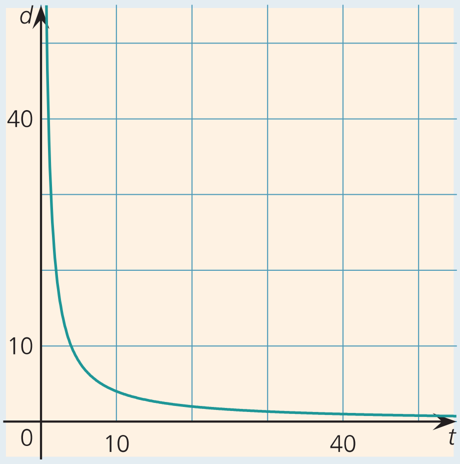
Mivel a négyzet t területe a d átlóból úgy kapható, hogy $t = \frac{d^2}{2}$, $d = \sqrt{2t}$, a hozzárendelés pedig a $t \mapsto \sqrt{2t}$.



5. K1 Adjuk meg, hogy a következő mennyiségpárok közül melyek állnak egymással egyenes arányban, melyek fordított arányban! Melyek azok, amelyek sem egyenes, sem fordított arányban nem állnak egymással?
a) Rögzített területű téglalapok két oldalának a hossza.
b) Rögzített kerületű téglalapok két oldalának a hossza.
c) Rögzített területű négyzetek oldalának és átlójának a hossza.
d) Egy szám különböző tört alakjainak számlálója és nevezője.
e) Két ikertestvér életkora.
f) Két ikertestvér tömege.

Egyenes arányosság: *c), d), e)*. Fordított arányosság: *a)*. Semelyik sem: *b), f)*.

6. K1 Egy téglalap területe 40 területegység. Szemléltessük koordináta-rendszerben azt a hozzárendelést, amely az egyik oldal függvényében megadja a másik oldalt!
Milyen kapcsolat áll fenn a két oldal között?

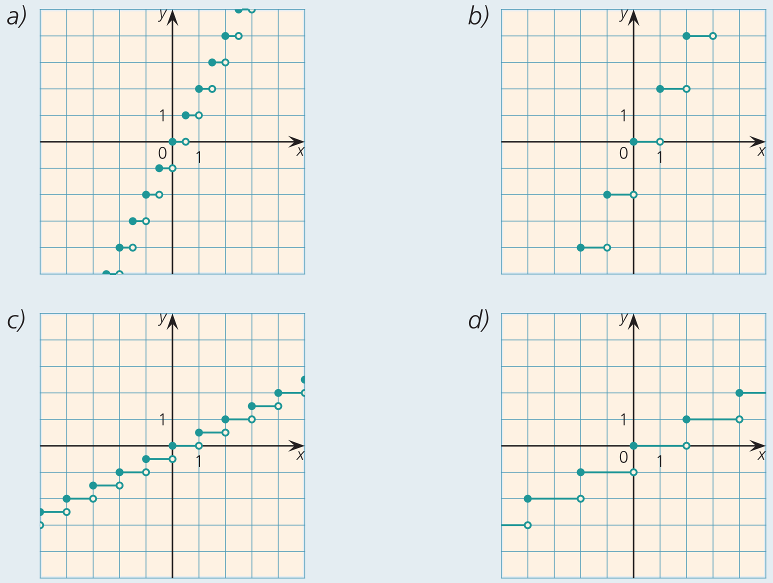


Fordított arányosság.

7. E1 Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő függvényeket! Készítsünk értéktáblázatokat!

a) $a: x \mapsto [2x]$; *b)* $b: x \mapsto 2[x]$; *c)* $c: x \mapsto \frac{1}{2}[x]$; *d)* $d: x \mapsto \left[\frac{1}{2}x\right]$.

Hasonlítsuk össze a függvények grafikonját az $x \mapsto [x]$ hozzárendelés grafikonjával!



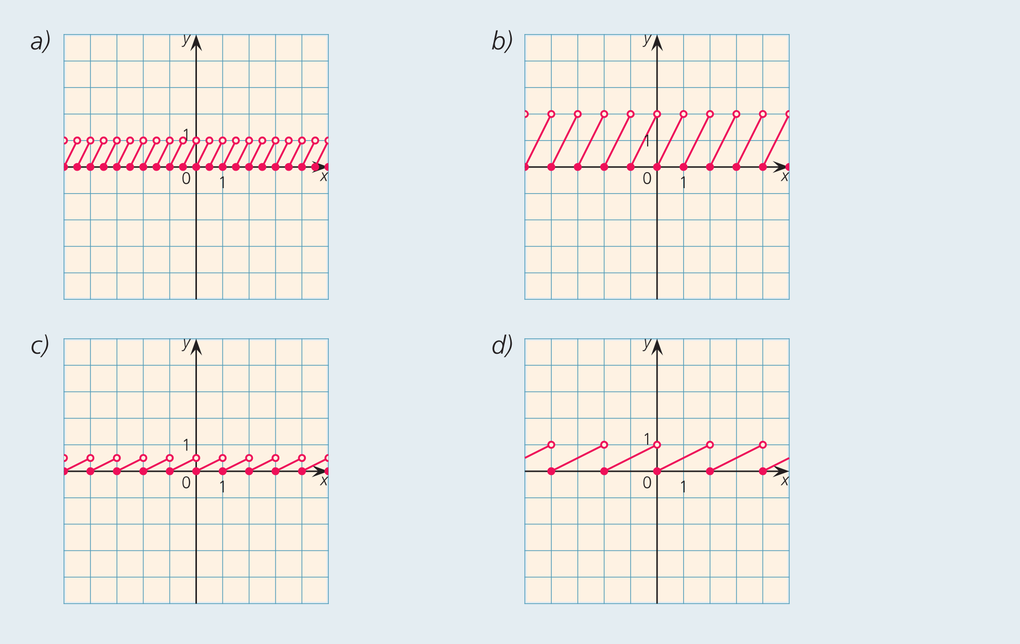
a) x tengely irányú $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás. *b)* y tengely irányú 2-szeresre változtatás.

c) y tengely irányú $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás. *d)* x tengely irányú 2-szeresre változtatás.

8. E1 Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő függvényeket! Készítsünk értéktáblázatokat!

a) $a: x \mapsto \{2x\}$; *b)* $b: x \mapsto 2\{x\}$; *c)* $c: x \mapsto \frac{1}{2}\{x\}$; *d)* $d: x \mapsto \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

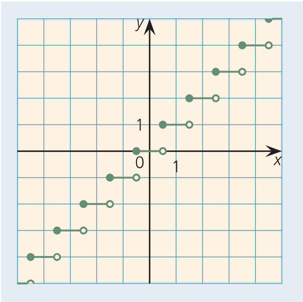
Hasonlítsuk össze a függvények grafikonját az $x \mapsto \{x\}$ hozzárendelés grafikonjával!



a) x tengely irányú $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás. *b)* y tengely irányú 2-szeresre változtatás.

c) y tengely irányú $\frac{1}{2}$-szeresre változtatás. *d)* x tengely irányú 2-szeresre változtatás.

9. E1 Az f függvény minden valós számhoz hozzárendeli az egészekre kerekített értékét. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a hozzárendelést! Készítsünk értéktáblázatot!



10. E2 Nevezzük egészrekerekítés-függvénynek azt az f hozzárendelést, amely minden valós számhoz az egészre kerekített értékét rendeli! Milyen függvénytranszformáció viszi az egészrész-függvényt az egészrekerekítés-függvénybe?

x tengely irányú $-\frac{1}{2}$ egységnyi eltolás.

IV. Bevezetés a geometriába

1. Pontok, egyenesek, síkok

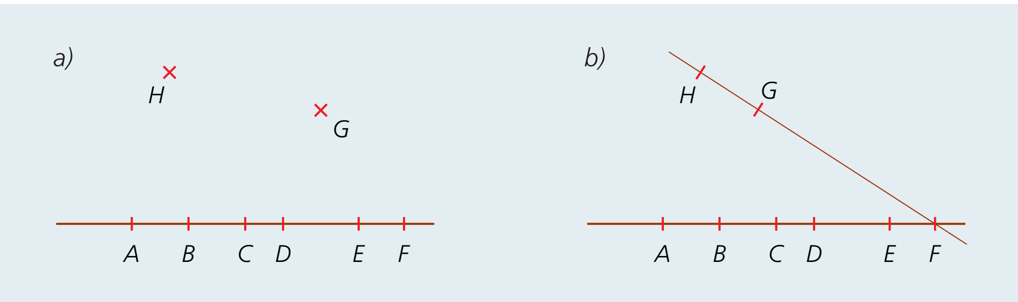
1. K1 Adott négy pont egy síkban, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Adott továbbá egy ötödik pont, amely nem illeszkedik erre a síkra. Hány síkot határoz meg az így megadott öt pont?

Az első négy pont (*A*, *B*, *C*, *D*) meghatároz egy síkot. Mivel közülük semelyik három pont nem illeszkedik egy egyenesre, ezért bármelyik kettő (*AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*) az ötödik *E* ponttal meghatároz egy síkot. Ez összesen hat.
Vagyis a feladatban szereplő öt pont hét síkot határoz meg.

2. K1 Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok nincsenek egy síkban, és semelyik három nincs egy egyenesen. Ezen pontok által meghatározott egyenesek vagy síkok száma a több?

Az öt pontból bármelyik hármat kiválasztva, azok meghatároznak egy síkot. A sík meghatározásához ki nem választott két pont ugyanakkor meghatároz egy egyenest. (Pl.: *ABD* sík és *CE* egyenes.) Vagyis ugyanannyi egyenest határoznak meg a feladatban szereplő pontok, mint síkot.

3. K2 Hány egyenest határoznak meg összesen az ábrán látható *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* pontok?



a) Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* pontok egy egyenesre illeszkednek, valamint a *G* és a *H* is meghatároz egy egyenest. További egyenesek: *HA*, *HB*, …, *HF*, ami hat darab, illetve *GA*, *GB*, …, *GF*, ami szintén hat darab. Ez összesen 14 egyenes.
b) Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* pontok egy egyenesre illeszkednek, valamint az *F*, *G*, *H* pontok is. További egyenesek: *HA*, *HB*, …, *HE*, ami öt darab, illetve *GA*, *GB*, …, *GE*, ami szintén öt darab. Ez összesen 12 egyenes.

4. K1 Adott a térben öt párhuzamos egyenes, melyek közül bármely három nem esik egy síkba. Hány síkot határoznak meg?

Bármely kettő meghatároz egy síkot. Vagyis összesen öt síkot határoznak meg.

5. K2 Adott a térben három egyenes és rájuk nem illeszkedő négy pont. Legfeljebb hány síklap illeszthető ezekre, ha minden sík egy egyenest és egy pontot tartalmaz az adottak közül?

Egy egyenes bármely rá nem illeszkedő ponttal meghatároz egy síkot. Vagyis legfeljebb 12 sík képzelhető el. (Ha valamelyik pont–egyenes páros által meghatározott síkra illeszkedik egy további pont vagy egyenes, akkor 12-nél kevesebb lesz a síkok száma.)

2. Szakasz, félegyenes, szög

1. K1 Az A, B, C három különböző pont egy egyenesre illeszkedik. Határozzuk meg az AC szakasz hosszát, ha $AB = BC = 19$ cm!

A feladat szövegéből kideríthető, hogy a B pont az AC szakasz felezőpontja.
Vagyis $AC = 38$ cm.

2. K2 Az A, B, C három különböző pont egy egyenesre illeszkedik. Határozzuk meg az AC szakasz legkisebb és legnagyobb hosszát, ha $AB = 19$ cm és $BC = 61$ cm!

Két eset lehetséges:
I. Az A pont illeszkedik a BC szakaszra.Ekkor a két szakasz különbségével egyenlő a hossz: $AC = 42$ cm.
II. Az A pont a BC szakasz B-n túli meghosszabbítására illeszkedik. Ekkor a két szakasz összegével egyenlő a hossz: $AC = 80$ cm.

3. E1 Az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben egy egyenesre illeszkednek. Igazoljuk, hogy $AC \cdot CD + BC \cdot AB = AB \cdot BD + BC \cdot CD$!

Legyen $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$. Ekkor a bizonyítandó állítás a következő alakban írható: $(x+y)z + yx = x(y+z) + yz$.
A zárójelek felbontása után látható, hogy mindkét oldalon $xy + yz + xz$ szerepel.

4. K1 Számoljuk ki az $\alpha + \beta$, a $\beta + \gamma$ és az $\alpha + \gamma$ szögek nagyságát, ha $\alpha = 37°\ 45'\ 34''$, $\beta = 28°\ 54'\ 48''$, $\gamma = 91°\ 22'\ 49''$!

$\alpha + \beta = 37°\,45'\,34'' + 28°\,54'\,48'' = 65°\,99'\,82'' = 66°\,40'\,22''$.
$\beta + \gamma = 28°\,54'\,48'' + 91°\,22'\,49'' = 119°\,76'\,97'' = 120°\,17'\,37''$.
$\gamma + \alpha = 91°\,22'\,49'' + 37°\,45'\,34'' = 128°\,67'\,83'' = 129°\,8'\,23''$.

5. K1 Számoljuk ki az α és a β szögek nagyságát, ha $\alpha + \beta = 72°$ és $\alpha - \beta = 14°\ 32'$!

Mivel $\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2} = \alpha$, ezért $\alpha = \frac{72° + 14°\,32'}{2} = \frac{86°\,32'}{2} = 43°\,16'$.
Mivel $\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2} = \beta$, ezért $\beta = \frac{72° - 14°\,32'}{2} = \frac{57°\,28'}{2} = 28°\,44'$.

6. K2 Az α és a β egymás mellékszöge.
a) Mekkorák ezek a szögek, ha az α szög $12°\ 17'$-cel nagyobb, mint a β?
b) Mekkorák ezek a szögek, ha az arányuk 2 : 7?
c) Mekkorák ezek a szögek, ha az α a β-nál β-val nagyobb?

a) $\beta = \frac{180° - 12°\,17'}{2} = \frac{167°\,43'}{2} = 83°\,51'\,30''$,
$\alpha = 83°\,51'\,30'' + 12°\,17' = 95°\,68'\,30'' = 96°\,8'\,30''$.
(Az α-t számolhatnánk így is: $\alpha = 180° - \beta = 180° - 83°\,51'\,30'' = 96°\,8'\,30''$.)
b) $\alpha = 2 \cdot \frac{180°}{9} = 40°$, $\beta = 7 \cdot \frac{180°}{9} = 140°$.
(A β-t számolhatnánk így is: $\beta = 180° - \alpha = 180° - 40° = 140°$.)
c) Vagyis $\alpha = 2\beta$, ezért $\alpha + \beta = 3\beta = 180°$. Azaz $\beta = 60°$, $\alpha = 120°$.

7. K1 Öt szög együtt teljesszöget alkot. Mindegyik szög az előzőnél 12°-kal nagyobb. Számítsuk ki a legkisebb szög nagyságát!

Legyen a legkisebb szög α. Ekkor $\alpha + (\alpha + 12°) + (\alpha + 24°) + (\alpha + 36°) + (\alpha + 48°) = 360°$.
Az összevonások után: $5\alpha + 120° = 360°$. Vagyis $\alpha = 48°$.

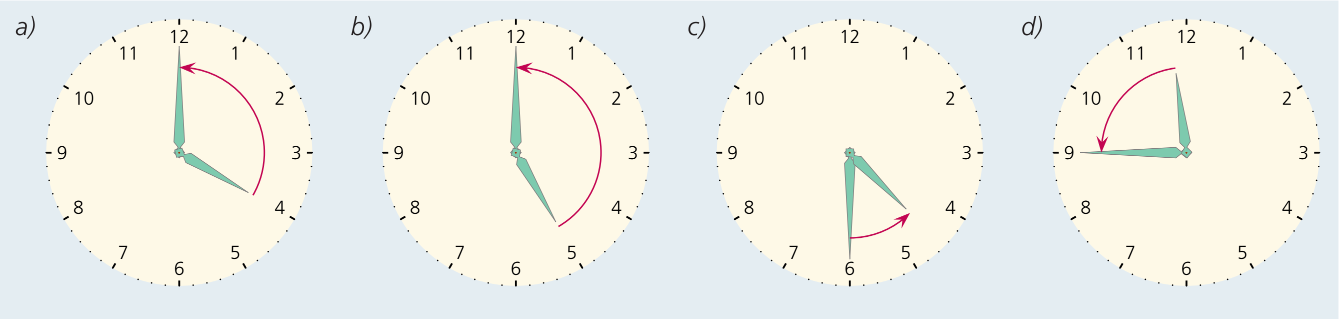
8. K2 Mekkora szöget zár be az óra két mutatója
a) 4 órakor; *b)* 5 órakor; *c)* fél ötkor; *d)* háromnegyed 12-kor?

a) A teljesszög harmadát, azaz 120°-ot.

b) A teljesszög $\frac{5}{12}$-ét, azaz 150°-ot.

c) A teljesszög $\frac{3}{24}$-ét ($\frac{1}{8}$-át), azaz 45°-ot.

d) A teljesszög $\frac{11}{48}$-át, azaz 82,5°-ot.



9. K2 Fejezzük ki fok, perc, másodperc alakban a következő szögeket:
a) 62,5°; *b)* 15,3°; *c)* 31,45°; *d)* 90,55°!

a) 62° 30′; *b)* 15° 18′; *c)* 31° 27′; *d)* 90° 33′.

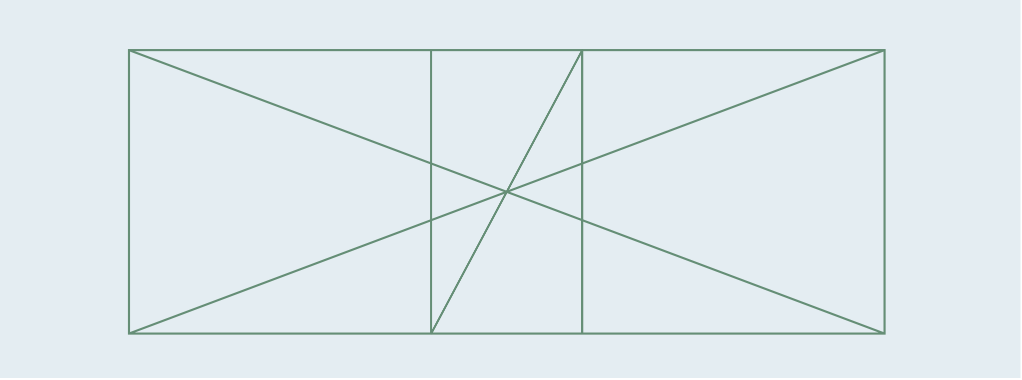
10. K2 Fejezzük ki fokokban a következő szögeket:
a) 12° 30′; *b)* 65° 45′; *c)* 23° 7′ 30″; *d)* 51° 11′ 15″!

a) 12,5°; *b)* 65,75°; *c)* 23,125°; *d)* 51,1875°!

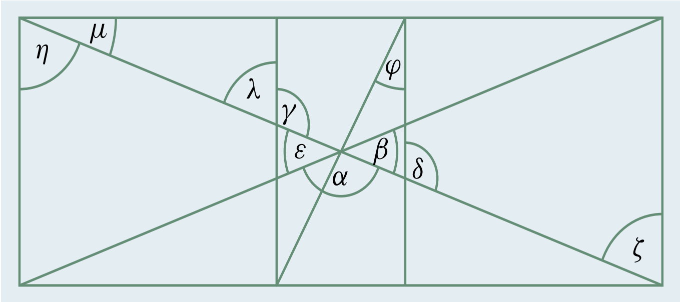
11. K2 Egy forgásszög egyik szárát rögzítjük, a másik szárát a csúcspontja körül forgatjuk. Először az óramutató járásával ellentétes irányban 120° 21′-es szöggel, aztán az óramutató járásával megegyező irányban 17° 32′-es szöggel, végül ismét az óramutató járásával ellentétes irányban 65° 47′-es szöggel forgatjuk el. Mekkora a három forgásszög összege?

Felírjuk a mutató forgatását előjeles szögekkel:
$120° 21' - 17° 32' + 65° 47' = 102° 49' + 65° 47' = 168° 36'$.
Vagyis a három forgásszög összege: 168° 36′.

12. K1 Keressünk az ábrán nevezetes szögpárokat!



A tanult szögpárokra egy-egy példát adunk (természetesen ennél több is látható az ábrán):



Mellékszögek: α és β.
Egyállású szögek: γ és δ.
Váltószögek: ζ és η.
Csúcsszögek: ε és β.
Pótszögek: μ és η.
Kiegészítő szögek: δ és λ.
Merőleges szárú konvex szögek: μ és ϕ.

3. Háromszögek

1. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai:

a) 17, 19, 35; *b)* 42, 11, 54;

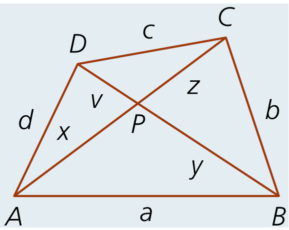
c) $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{1}{12}$; *d)* $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{15}$?

Használjuk a háromszög-egyenlőtlenséget!
a) Mivel $17 < 19 + 35$, $19 < 17 + 35$, $35 < 17 + 19$, ezért ilyen háromszög létezik. (A harmadik egyenlőtlenség egyedül is igazolja a háromszög létezését, mert a két rövid oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.)
b) Mivel $42 + 11 < 54$, ezért ilyen háromszög nem létezik.
c) Mivel $\frac{7}{3} = \frac{9}{4} + \frac{1}{12}$, ezért ilyen háromszög nem létezik.
d) Mivel $\frac{8}{5} < \frac{5}{3} + \frac{2}{15}$, $\frac{5}{3} < \frac{8}{5} + \frac{2}{15}$, $\frac{2}{15} < \frac{5}{3} + \frac{8}{5}$, ezért ilyen háromszög létezik.

2. K2 Mutassuk meg, hogy minden háromszögben kiválasztható két olyan oldal, amelyeknek az összege nem kisebb, mint a harmadik oldal kétszerese!

A háromszög oldalai közül legyen a az, amelyiknél nincs rövidebb, és legyen c az, amelyiknél nincs hosszabb: $a \le b \le c$. Ebből következik, hogy $2a \le 2b \le b + c$.

3. E1 Igazoljuk, hogy minden konvex négyszögben a hosszabb átló hosszabb a legrövidebb oldalnál!



Legyen az *ABCD* konvex négyszög átlóinak metszéspontja *P*. Írjunk fel háromszög-egyenlőtlenséget az *ABP*, *BCP*, *CDP* és *DAP* háromszögekre:
$a < x + y$, $b < y + z$, $c < z + v$, $d < v + x$.
A négy egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy
$a + b + c + d < x + y + y + z + z + v + v + x$.
Mivel $x + z$ az egyik átló hossza, $y + v$ pedig a másik átló hossza, így az egyenlőtlenség jobb oldalán a két átló összegének kétszerese látható. (Vagyis $a + b + c + d < 2e + 2f$.)
Az egyenlőtlenség bal oldalán álló $a + b + c + d$ összegnél nem nagyobb a legrövidebb oldal négyszerese. (Ha a-nál nincs rövidebb oldal, akkor $4a \le a + b + c + d$.)
Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló két átló összegének kétszeresénél nem kisebb a hosszabb átló négyszerese. (Ha f-nél nincs hosszabb átló, akkor $2(e + f) \le 4f$.)
Vagyis valóban minden konvex négyszögben a hosszabb átló hosszabb a legrövidebb oldalnál.

4. E2 Igazoljuk az ABC háromszög belsejében lévő minden P pontra, hogy a $PA + PB + PC$ összeg nagyobb, mint a háromszög félkerülete!

Tudjuk a háromszög-egyenlőtlenségek miatt, hogy
$AB < AP + BP$, $BC < BP + CP$, $CA < CP + AP$.
A három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, majd elosztjuk 2-vel, és a bizonyítandó állítást kapjuk.

5. E2 Igazoljuk az $ABCD$ téglalap belsejében lévő minden P pontra, hogy a $PA + PB + PC + PD$ összeg nem kisebb, mint a téglalap
a) félkerülete; *b)* átlójának kétszerese!

a) Tudjuk a háromszög-egyenlőtlenségek miatt, hogy $AB < AP + BP$, $BC < BP + CP$, $CD < CP + DP$, $DA < DP + AP$. A négy egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, majd elosztjuk 2-vel, és a bizonyítandó állítást kapjuk.
b) Tudjuk a háromszög-egyenlőtlenségek miatt, hogy $AC \le AP + CP$, $DB = AC \le BP + DP$. A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, és a bizonyítandó állítást kapjuk.

6. K1 Egy háromszög két szögének aránya 5 : 7, a harmadik szög 72°-os. Mekkorák a hiányzó szögek?

A hiányzó két szög összege 108°. Az egyik szög legyen $5x$, ekkor a másik $7x$. Vagyis $5x + 7x = 108°$, amiből $x = 9°$. A hiányzó két szög: 45°, 63°.

7. K2 Egy háromszög egyik szöge 54°, tudjuk továbbá, hogy két szögének aránya 4 : 5. Mekkorák a hiányzó szögek?

Három eset lehetséges.
I. eset: Ha a 4 : 5 arányú két szög közül a kisebbik az 54°-os, akkor a nagyobb $5 \cdot \frac{54°}{4} = 67{,}5°$.
Ekkor a harmadik szög: $180° - 54° - 67{,}5° = 58{,}5°$.

II. eset: Ha a 4 : 5 arányú két szög közül a nagyobbik az 54°-os, akkor a kisebb $4 \cdot \frac{54°}{5} = 43{,}2°$.
Ekkor a harmadik szög: $180° - 54° - 43{,}2° = 82{,}8°$.

III. eset: Ha a 4 : 5 arányú két szög közül egyik sem egyenlő 54°-kal, akkor a hiányzó két szög összege 126°. Az egyik szög legyen $4x$, ekkor a másik $5x$. Vagyis $4x + 5x = 126°$, amiből $x = 14°$. A hiányzó két szög: 56°, 70°.

8. K1 Egy háromszögben adott egy α belső és egy β' külső szög. Mekkorák a hiányzó belső szögek?
a) $\alpha = 24°$, $\beta' = 103°$; *b)* $\alpha = 104°$, $\beta' = 33°$.

a) $\beta = 180° - 103° = 77°$, $\gamma = 180° - 24° - 77° = 79°$;
b) $\beta = 180° - 33° = 147°$, $\gamma = 180° - 104° - 147° = -71°$. Ilyen háromszög nem létezik.

4. További összefüggések a háromszög alapadatai között

1. K1 Rajzoltunk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek két 58°-os szöge van. A szára vagy az alapja a hosszabb?

Mivel a háromszögben a szögösszeg 180°, ezért a harmadik szög (a szárak által bezárt szög) $180^\circ - 2 \cdot 58^\circ$, azaz 64°. Mivel a szárszög a legnagyobb szög a háromszögben, ezért az alap hosszabb, mint a szár.

2. K1 Egy háromszög két szöge 52°-os és 64°-os. Egyenlő szárú-e a háromszög?

Mivel a háromszögben a szögösszeg 180°, ezért a harmadik szög $180^\circ - 52^\circ - 64^\circ$, azaz 64°. Mivel van két egyenlő szöge, ezért egyenlő szárú a háromszög.

3. K2 Az *ABC* háromszögben az *A*-nál lévő szög 51°-os, a *C*-nél lévő pedig 68°-os. Rakjuk növekedő sorrendbe az oldalakat!

Mivel a háromszögben a szögösszeg 180°, ezért a harmadik szög $180^\circ - 51^\circ - 68^\circ$, azaz 61°. Mivel nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van, ezért $BC < CA < AB$.

4. K2 Az *ABC* háromszögben $AB = 8$ cm, $AC = 3{,}5$ cm. Melyik állítás igaz, melyik hamis?
Az *ABC* háromszög
a) *C*-nél lévő belső szöge a legnagyobb belső szög.
b) *B*-nél lévő belső szöge kisebb, mint a *C*-nél lévő.
c) *A*-nál lévő külső szöge a legnagyobb külső szög.
d) Bármelyik belső szöge lehet 90°-os.
e) *BC* oldala nem a leghosszabb oldal.

A harmadik oldal lehetséges hossza: $4{,}5 \text{ cm} < BC < 11{,}5 \text{ cm}$. Vagyis *BC* nem lehet a legrövidebb oldal, de a leghosszabb igen.
Ezt figyelembe véve: *a)* hamis; *b)* igaz; *c)* hamis; *d)* hamis; *e)* hamis.

5. K2 Keressük meg a megkezdett mondat helyes befejezését!
Ha egy háromszögben az egyik külső szög hegyesszög, akkor
a) a háromszög lehet, hogy szabályos.
b) a háromszög lehet, hogy derékszögű.
c) a vele szemközti oldal a leghosszabb a háromszögben.
d) a háromszög nem lehet egyenlő szárú.

Ha a külső szög hegyesszög, akkor a belső tompaszög, vagyis nem lehet a háromszög szabályos.
Mivel a háromszög egyik belső szöge tompaszög, ezért a háromszög derékszögű sem lehet. (Ekkor a szögösszeg már több lenne, mint 180°.)
A háromszög tompaszögű, és létezik tompaszögű egyenlő szárú háromszög.
Ezek szerint a mondat helyes befejezése nem lehet az *a)*, *b)*, *d)*.
A *c)* pedig valóban jó, hiszen a tompaszög a legnagyobb szög a háromszögben, ezért a vele szemközti oldal a leghosszabb.

5. Összefüggés a derékszögű háromszög oldalai között

1. K1 Adott egy derékszögű háromszög két oldala. Számítsuk ki a harmadik oldalának hosszát! (Az átfogót jelöltük c-vel.)

a) $a = 33$, $b = 56$; *b)* $a = 7{,}2$, $b = 15{,}4$;
c) $b = 80$, $c = 89$; *d)* $a = 16{,}5$, $c = 21{,}9$.

Használjuk a Pitagorasz-tételt! Az *a)* és a *b)* esetben $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, a *c)*-nél $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, a *d)*-nél $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
a) $c = 65$; *b)* $c = 17$; *c)* $a = 39$; *d)* $b = 14{,}4$.

2. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai a következők? Ha igen, akkor derékszögű-e?

a) $a = 65$, $b = 72$, $c = 97$; *b)* $a = 12$, $b = 35$, $c = 41$;
c) $a = 2$, $b = 3{,}75$, $c = 4{,}25$; *d)* $a = 0{,}425$, $b = 0{,}275$, $c = 0{,}725$.

a) Létezik ilyen háromszög, mert minden oldalára teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A háromszög derékszögű, mivel $65^2 + 72^2 = 9409$ és $97^2 = 9409$.
b) Létezik ilyen háromszög, mert minden oldalára teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A háromszög nem derékszögű, mivel $12^2 + 35^2 = 1369$ és $41^2 = 1681$.
c) Létezik ilyen háromszög, mert minden oldalára teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A háromszög derékszögű, mivel $2^2 + 3{,}75^2 = 18{,}0625$ és $4{,}25^2 = 18{,}0625$.
d) Nincs ilyen háromszög, mert $a + b < c$.

3. K1 Derékszögű-e a PQR háromszög?

a) $P(-4; 1)$, $Q(-3; -3)$, $R(5; -1)$; *b)* $P(-1; 2)$, $Q(1; 5)$, $R(6; 1)$.

a) $PQ = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, $QR = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$, $PR = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$.
A háromszög derékszögű, mert $PQ^2 + QR^2 = 17 + 68 = 85$ és $PR^2 = 85$.

b) $PQ = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $QR = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$.
A háromszög nem derékszögű, mert $PQ^2 + QR^2 = 13 + 41 = 54$ és $PR^2 = 50$.

4. K1 Vízszintes talajon álló két függőleges oszlop távolsága 8 m. Az egyik oszlop 2 m-rel alacsonyabb a másiknál. Mekkora a két oszlop tetejének távolsága?

Jelöljük a keresett távolságot h-val. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a két oszlop távolságára, a h-ra, és a két oszlop magasságának különbségére: $h = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} \approx 8{,}25$.
Vagyis a két oszlop tetejének távolsága kb. 8,25 méter.

5. E1 Az ABC derékszögű háromszög BC befogóján vegyük fel a D pontot, az AC befogóján pedig az E pontot. Igazoljuk, hogy

a) $BA^2 - BE^2 = DA^2 - DE^2$; *b)* $\dfrac{BA - BE}{DA - DE} = \dfrac{DA + DE}{BA + BE}$!

a) Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az EBC és az ABC derékszögű háromszögre: $BC^2 + CE^2 = BE^2$, $BC^2 + CA^2 = BA^2$.
A második egyenlet megfelelő oldalaiból vonjuk ki az első egyenlet megfelelő oldalait, így ezt kapjuk: $CA^2 - CE^2 = BA^2 - BE^2$. (1)
Most alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az EDC és az ADC derékszögű háromszögre: $DC^2 + CE^2 = DE^2$, $DC^2 + CA^2 = DA^2$.
A második egyenlet megfelelő oldalaiból megint vonjuk ki az első egyenlet megfelelő oldalait: $CA^2 - CE^2 = DA^2 - DE^2$. (2)
Az (1) és a (2) egyenletből kapjuk a bizonyítandó állítást: $BA^2 - BE^2 = DA^2 - DE^2$.
b) Ha mindkét oldalt megszorozzuk $(DA - DE)(BA + BE)$-vel, és alkalmazzuk mindkét oldalon az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ azonosságot, akkor az *a)* feladat állítását kapjuk.

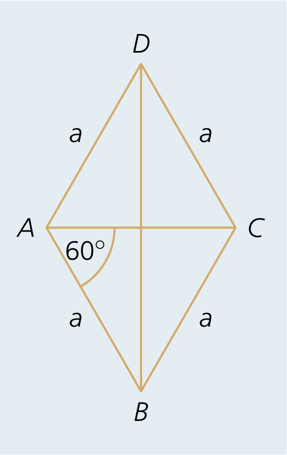
6. Geometriai számítások

1. K1 Adott egy egyenlő szárú háromszög a alapja és b szára. Számítsuk ki a háromszög m magasságát!
a) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm; *b)* $a = 17$ cm, $b = 12$ cm.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az $\frac{a}{2}$ és m befogójú, b átfogójú derékszögű háromszögre: $m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

a) $m = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$ (cm); *b)* $m = \sqrt{12^2 - 8{,}5^2} = \sqrt{71{,}75} \approx 8{,}471$ (cm).

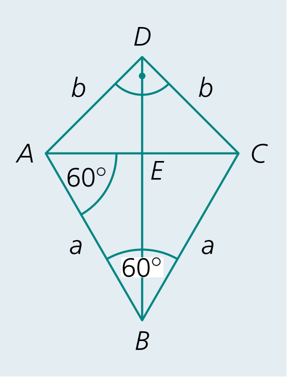
2. K1 Az $ABCD$ rombusz oldalainak hossza 6 cm, A-nál lévő szöge 120°. Számítsuk ki átlóinak hosszát!



Az $ABCD$ rombuszt a rövidebb átlója két szabályos háromszögre vágja. Tudjuk, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Mivel most $a = 6$ cm, ezért $AC = 6$ cm, $BD = 6\sqrt{3}$ cm $\approx 10{,}392$ cm.

3. K2 Egy deltoidban a 90°-os szöggel szemben 60°-os szög van. A csúcsaikat összekötő átló hossza 10 cm. Mekkora a deltoid kerülete?



Az ABC szabályos háromszögben: $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Az ACD egyenlő szárú derékszögű háromszögben: $DE = \frac{a}{2}$.

Mivel $BD = 10$, ezért $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{a}{2} = 10$ cm. Ebből kapjuk: $a = \frac{20}{\sqrt{3}+1}$.

Az AED egyenlő szárú derékszögű háromszögben: $AD = b = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{10}{\sqrt{3}+1}\sqrt{2}$.

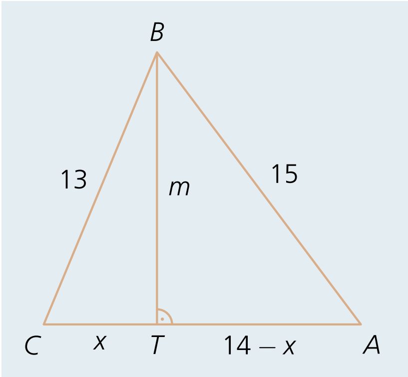
$k = 2(a+b) = 2\left(\frac{20}{\sqrt{3}+1} + \frac{10}{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{2}\right) = \frac{40+20\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \approx 24{,}99$.

Vagyis a deltoid kerülete kb. 24,99 cm.

4. K2 Mutassuk meg, hogy az m, $a + b$ és $c + m$ hosszúságú szakaszok derékszögű háromszöget határoznak meg, ahol a és b egy derékszögű háromszög befogóinak, c az átfogójának, m pedig az átfogójához tartozó magasságának a hossza!

Mivel $m^2 + (a+b)^2 = m^2 + a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cm + m^2 = (c+m)^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az m, $a+b$ és $c+m$ hosszúságú szakaszok derékszögű háromszöget határoznak meg. Az átalakítás során felhasználtuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$ és $2t = ab = cm$.

5. E1 Számítsuk ki az $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm oldalhosszúságú háromszög b oldalához tartozó magasságának hosszát!



Az ábra jelöléseit használva: $m^2 + x^2 = 13^2$ és $m^2 + (14 - x)^2 = 15^2$.
A második egyenletben elvégezzük a négyzetre emelést, majd az $m^2 + x^2$ helyére 13^2-t helyettesítünk: $13^2 + 14^2 - 28x = 15^2$.
Ebből kapjuk, hogy $x = \dfrac{13^2 + 14^2 - 15^2}{28} = 5$ és $m = \sqrt{13^2 - x^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Vagyis a háromszög b oldalához tartozó magasságának hossza 12 cm.

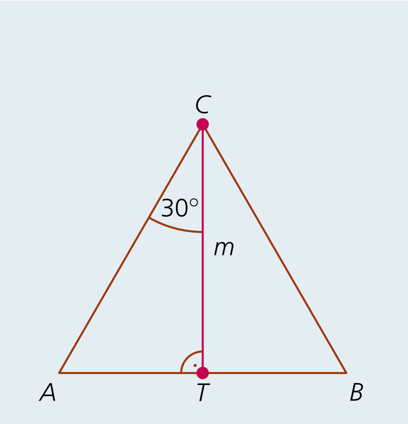
6. E2 Határozzuk meg azokat a pitagoraszi háromszögeket, amelyeknek a kerülete és területe azonos mérőszámú!

A feladat szövege szerint: $\dfrac{ab}{2} = a + b + c$, azaz $ab - 2a - 2b = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ($a > 0$, $b > 0$, egész számok). Ebből kapjuk: $a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0$, amit ab-vel osztunk és a következő alakban írhatunk: $(a - 4)(b - 4) = 8$. A lehetőségeket táblázatban rögzítettük:

$a - 4$	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
$b - 4$	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1
a	–4	0	2	3	5	6	8	12
b	3	2	0	–4	12	8	6	5

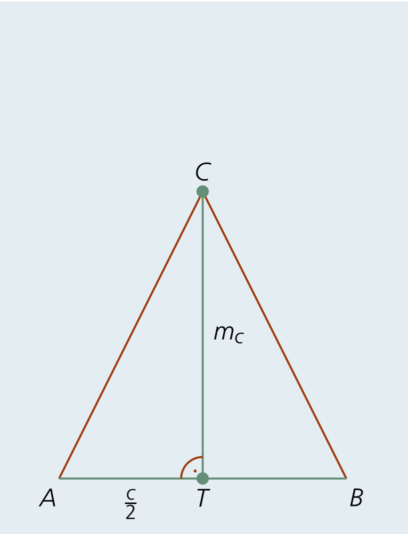
Kétféle derékszögű háromszöget kaptunk.
Az egyiknek a befogói: 6 és 8, ennek átfogója 10, a másiknak a befogói: 5 és 12, ennek átfogója 13. Mindkettő pitagoraszi háromszög, így mindkettő megoldása a feladatnak.

7. Geometriai szerkesztések



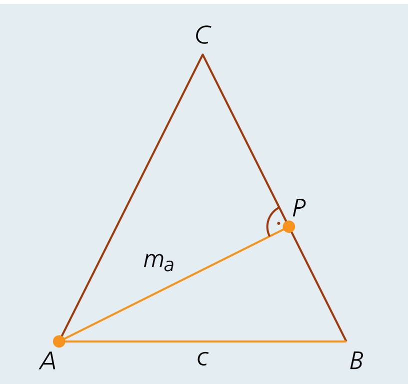
1. K1 Szerkesszünk adott magasságú szabályos háromszöget!

A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az adott *TC* magasság felezi a *C*-nél lévő 60°-os szöget. Az *ATC* háromszögben ismert a *TC* oldal és a rajta fekvő két szög, ezért ez a háromszög megszerkeszthető. Ugyanezt mondhatjuk a *BTC* háromszögről is.

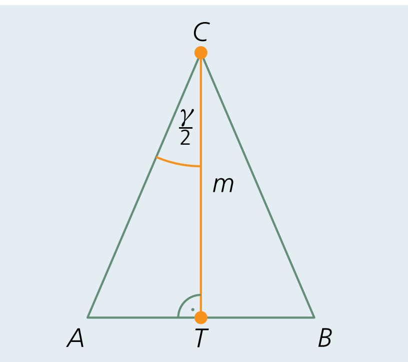


2. K2 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és
a) az alaphoz tartozó magassága;
b) a szárhoz tartozó magassága!

a) Adatok: c, m_c.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az adott *TC* magasság felezi az *AB* oldalt. Az *ATC* háromszögben ismert a *TC* és az *AT* oldal és a közbezárt 90°-os szög, ezért ez a háromszög megszerkeszthető. Ugyanezt mondhatjuk a *BTC* háromszögről is.



b) Adatok: c, m_a.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az *APB* derékszögű háromszögben ismert az *AB* átfogó és az *AP* befogó. Ezt a háromszöget szerkesztjük meg először, majd a *C* pont megszerkesztése következik. Az *AP*-re *P*-ben merőleges egyenesből az *A* középpontú *c* sugarú kör metszi ki a *B* pontot.
A *PB* egyenesnek és az *AB* szakasz felezőmerőleges egyenesének metszéspontja adja a *C* pontot.

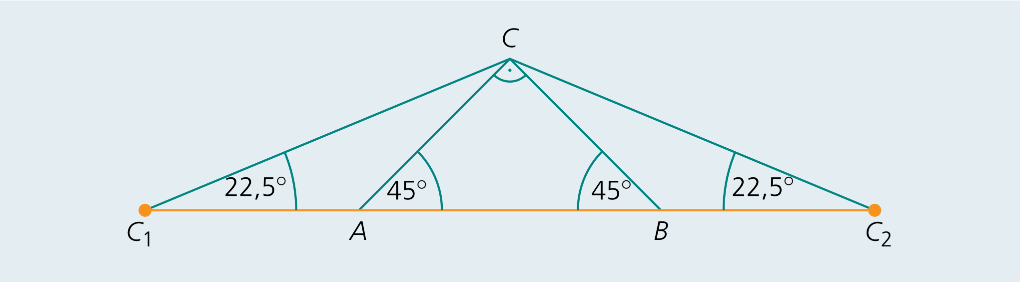


3. K2 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alaphoz tartozó magassága és az alappal szemközti szöge!

Adatok: m, γ.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az adott *TC* magasság felezi a *C*-nél lévő γ szöget. Az *ATC* háromszögben ismert a *TC* oldal és a rajta fekvő két szög, ezért ez a háromszög megszerkeszthető. Ugyanezt mondhatjuk a *BTC* háromszögről is.

4. K2 Szerkesszük meg az adott kerületű egyenlő szárú derékszögű háromszöget!

Adat: k.



A vázlatrajzot úgy készítettük el, hogy $AC_1 = AC$, $BC_2 = BC$ legyen, így C_1C_2 az adott k kerülettel egyenlő. A C_1 és C_2 csúcsoknál 22,5°-os szögek vannak. (Az AC_1C egyenlő szárú háromszögben a CC_1 alappal szemközti külső szög 45°. Ez a szög egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, amelyek most egyenlők.)
Először megszerkesztjük a C_1C_2C háromszöget. Majd a CC_1 szakasz felezőmerőlegese kimetszi a C_1C_2 szakaszból az A pontot, a CC_2 szakasz felezőmerőlegese kimetszi a C_1C_2 szakaszból a B pontot.

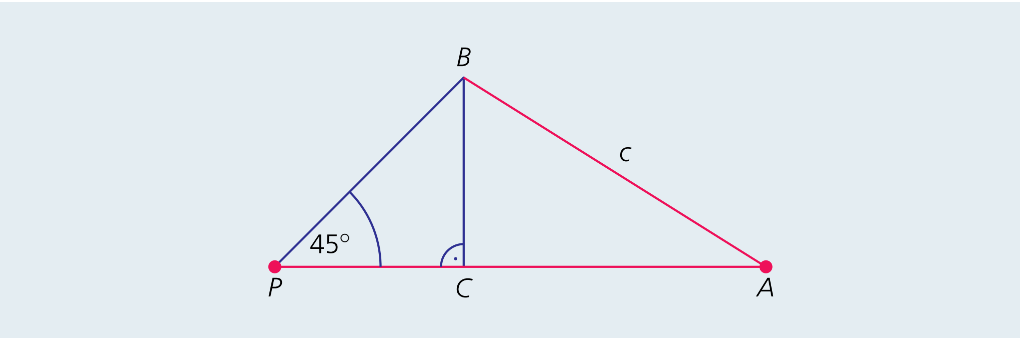
5. E1 Szerkesszük meg az adott kerületű egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alappal szemközti szöge is!

Adatok: k, γ.

Az előző feladatban látható módon járunk el. Most a C_1 és C_2 csúcsoknál $45° - \frac{\gamma}{4}$ szögek vannak.

6. E1 Egy derékszögű háromszögnek ismert az átfogója és a két befogó összege. Szerkesszük meg a háromszöget!

Adatok: c, $a + b$.



A vázlatrajzot úgy készítettük el, hogy $PC = BC$ teljesüljön, s így AP szakasz hossza a derékszögű háromszög két befogójának hosszával legyen egyenlő. Ennek felvételével kezdjük a szerkesztést.
A BCP háromszög egyenlő szárú derékszögű, így P-nél 45°-os szög van. Adott az AB szakasz hossza is. Így a B csúcs megszerkeszthető.
PA-hoz P-nél szerkesztünk egy 45°-os e egyenest, az A körül pedig egy c sugarú k kört. Metszéspontjuk adja a B pontot.
B-ből merőlegest állítunk PA-ra, ami kimetszi a keresett C pontot is.
Ha az e egyenesnek és a k körnek nincs közös pontja, akkor nem kapunk megoldást.
Ha az e egyenes érinti a k kört, akkor egy megoldás lesz.
Ha az e egyenes és a k kör metszi egymást, akkor két megoldás van. (A két megoldás alakra nem különbözik egymástól.)

8. Thalész-tétel

1. K1 Egy AB átmérőjű félköríven felvettük a P és a Q pontot. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha tudjuk, hogy az A csúcsból induló magasság talppontja P, a B csúcsból induló magasság talppontja pedig Q!

Az AQ és a BP egyenes metszéspontja adja a C csúcsot. (A Thalész-tétel miatt $APB\sphericalangle = 90°$ és $AQB\sphericalangle = 90°$.)

2. K2 Az ABC háromszögben az A csúcsból induló magasság talppontja legyen T_1, a B csúcsból induló magasság talppontja legyen T_2. Legyen továbbá az AB oldal felezőpontja F. Igazoljuk, hogy T_1FT_2 egyenlő szárú háromszög!

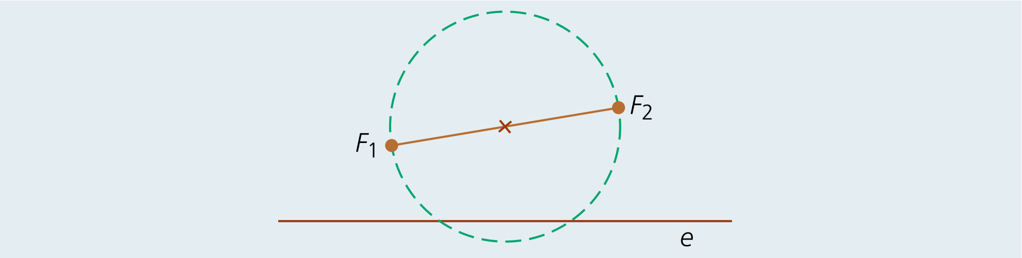
Tudjuk, hogy $AT_1B\sphericalangle = 90°$ és $AT_2B\sphericalangle = 90°$, ezért az AB Thalész-körére illeszkedik T_1 és T_2 pont is. Vagyis az AB szakasz F felezőpontjától mindkettő sugárnyira található. Ez pontosan a bizonyítandó állítás.

3. K2 Egy körben megrajzoltunk egy AB átmérőt és egy AC húrt. Felvettük továbbá a rajzunkon a D pontot úgy, hogy AD szakasz felezőpontja C. Mutassuk meg, hogy a BD szakasz hossza a kör átmérőjével egyenlő!

Az ABD háromszögben BC merőlegesen felezi az AD oldalt. Vagyis $AB = DB$, és ezt kellett megmutatni.

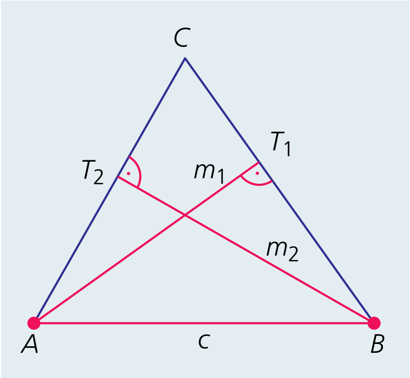
4. K2 Egy egyenes út mellett a mezőn áll két fa. Készítsünk térképvázlatot, majd szerkesztéssel határozzuk meg az úttestnek azt a pontját, ahonnan a két fa derékszögben látszik!

Vázlatunkon a két fa F_1 és F_2, az út az e egyenes.



Az F_1F_2 Thalész-körének minden pontjából derékszögben látszik F_1F_2. A keresett pontok a Thalész-kör és az e egyenes közös pontjai lesznek.
Ha a Thalész-kör metszi az e egyenest, akkor két pont is megfelel.
Ha a Thalész-kör érinti az e egyenest, akkor egy megfelelő pont van.
Egyébként nincs megfelelő pont.

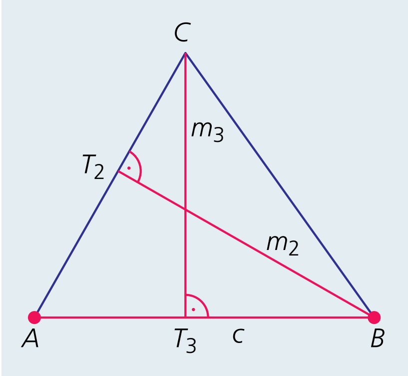
5. K2 Szerkesszünk háromszöget egy oldalból és két magasságból!



Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: A két adott magasság egyike sem tartozik az adott oldalhoz.
Adatok: c, m_1, m_2.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Megszerkesztjük az AB szakasz Thalész-körét, amire illeszkedik a T_1 és a T_2 pont.
Az A középpontú, m_1 sugarú és a B középpontú, m_2 sugarú kör kimetszi a Thalész-körből a T_1, illetve a T_2 pontot.
Az AT_2 és a BT_1 egyenesek metszéspontjaként kapjuk a C pontot.
A szerkeszthetőség feltétele: $m_1 < c$ és $m_2 < c$.

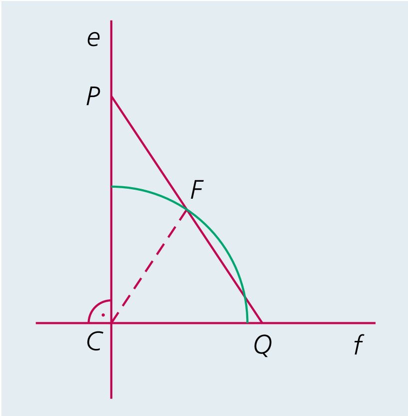
2. eset: A két adott magasság egyike az adott oldalhoz tartozik.
Adatok: c, m_2, m_3.
Használjuk a vázlatrajz jelöléseit!
Megszerkesztjük az AB szakasz Thalész-körét, amire illeszkedik a T_2 pont. A B középpontú, m_2 sugarú kör kimetszi a Thalész-körből a T_2 pontot. Az AB egyenessel m_3 távolságra húzott párhuzamos egyenes és az AT_2 egyenes metszéspontja lesz a C pont.
A szerkeszthetőség feltétele: $m_2 < c$.



6. E1 Az e és f egyenesek merőlegesek egymásra. Tudjuk, hogy PQ szakasz hossza állandó, továbbá P az e egyenesre, Q az f egyenesre illeszkedik. A PQ szakasz összes lehetséges helyzetében jelöljük meg a szakasz F felezőpontját! Milyen ponthalmazt kapunk?

Az ábrán a feladat feltételeinek megfelelő helyzetben lévő PQ szakaszt látunk.

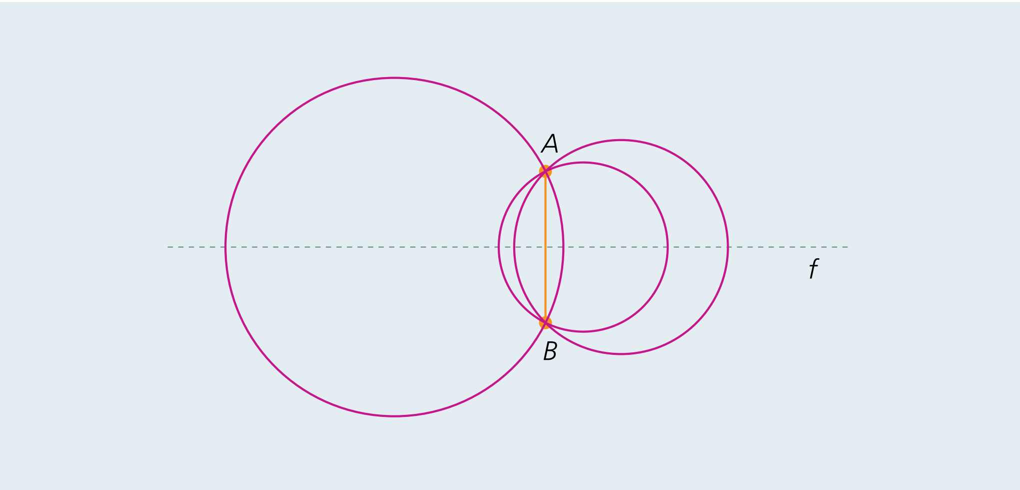
A PQ Thalész-körére illeszkedik e és f egyenes C metszéspontja. Ezért a PQ szakasz F felezőpontja a C-től mindig a PQ szakasz hosszának felére található. Ez egy állandó, így a keresett ponthalmaz egy kör, amelynek C a középpontja, sugara pedig a PQ hosszának felével egyenlő.



9. A háromszög oldalfelező merőlegesei és köré írt köre

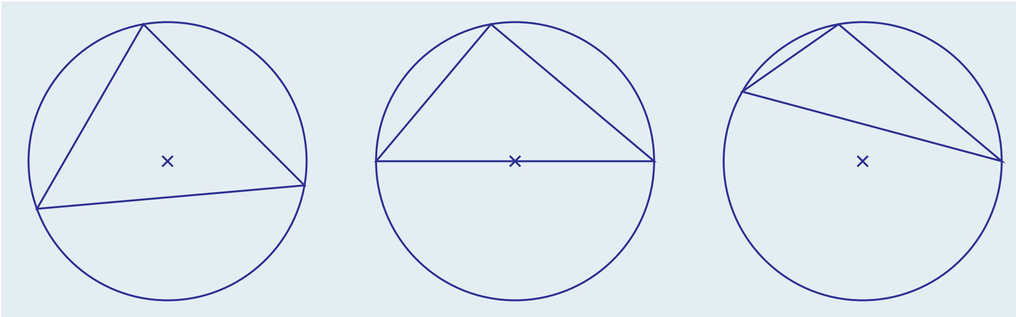
1. K1 Vegyünk fel egy AB szakaszt! Szerkesszünk három különböző kört, amelyek mindegyikének az AB szakasz egy húrja!

Az AB szakasz f felezőmerőleges egyenesén bárhol választhatunk egy pontot, az jó lesz a kör középpontjának.



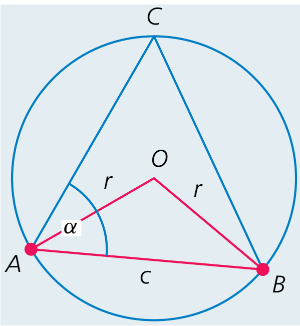
2. K1 Szerkesszünk egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget, amelyeknek a köré írt köre ugyanaz az előre adott kör!

A három ábra mutat egy-egy megoldást.



3. K2 Szerkesszünk egy 2,5 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget! Szerkesszük meg a háromszög köré írt körét is!

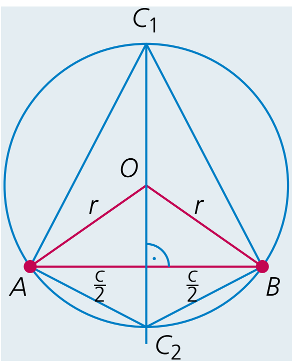
Az *ABC* szabályos háromszög megszerkesztése után elég két oldalfelező merőleges egyenest megszerkeszteni, ezek metszéspontja megadja a köré írt kör *K* középpontját. Ezután például a *KA*-t körzőnyílásba vesszük, és megrajzoljuk a kívánt kört.



4. K2 Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az adott oldalon fekvő egyik szöge!

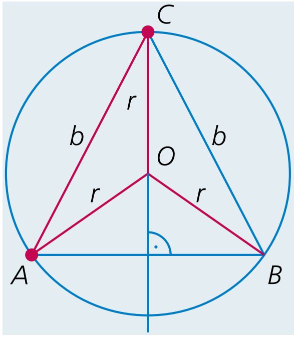
Adatok: c, r, α.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az *AB* szakasz felvétele után megszerkesztjük az *O* pontot. Ekkor az *O* középpontú *r* sugarú kör és az *AB*-hez *A*-ban α szögben hajló egyenes metszéspontja lesz a *C*.

5. K2 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott
a) az alapja és a köré írt kör sugara;
b) a szára és a köré írt kör sugara;
c) a szárak által bezárt szög és a köré írt kör sugara!

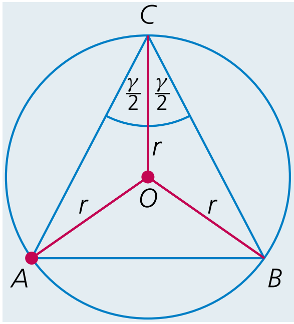


a) Adatok: c, r.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az *AB* szakasz felvétele után megszerkesztjük az *O* pontot. Ekkor az *O* középpontú *r* sugarú kör és az *AB* felezőmerőlegesének metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa. Mivel két metszéspontot kapunk, ezért két megfelelő háromszög szerkeszthető: ABC_1 és ABC_2.
A megoldhatóság feltétele: $c \leq 2r$. ($c = 2r$ esetén a kapott két háromszög egybevágó.)

b) Adatok: b, r.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az AC szakasz felvétele után megszerkesztjük az O pontot. Ekkor az O középpontú r sugarú kör és a C középpontú, b sugarú kör metszéspontja lesz a B csúcs. (A két körnek két metszéspontja van, a másik az A.)
A megoldhatóság feltétele: $b < 2r$.



c) Adatok: r, γ.
A vázlatrajz jelöléseit használjuk.
Az AO szakasz felvétele után megszerkeszthető a C pont. (Mivel ACO háromszög egyenlő szárú, ezért A-nál is $\frac{\gamma}{2}$ szög van, továbbá $AOC\sphericalangle = 180° - \gamma$.) Ekkor az O középpontú r sugarú kör és az AC-hez C-nél γ szögben hajló egyenes metszéspontja lesz a B csúcs.
A megoldhatóság feltétele: $0 < \gamma < 180°$.



6. K2 Szerkesszük meg egy adott kör ismeretlen középpontját!

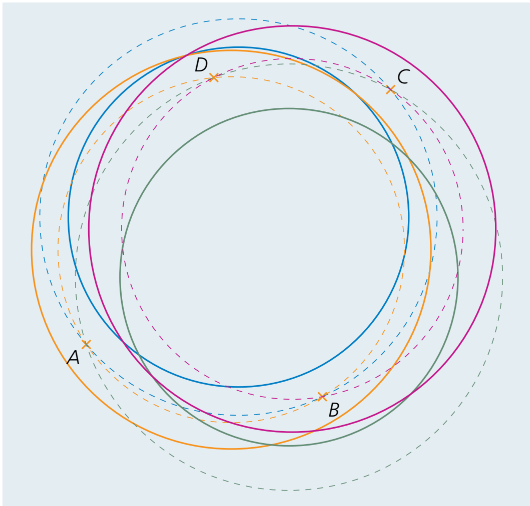
Mivel minden húrfelező merőleges egyenesre illeszkedik a kör középpontja, ezért két tetszőleges (de nem párhuzamos) húr felezőmerőlegesének metszéspontja lesz a kör középpontja.

7. K1 Az $ABCDE$ szabályos ötszög csúcsai közül minden lehetséges módon kiválasztunk hármat. Az így kapott háromszögek mindegyikének megszerkesztjük a köré írt körét. Hány különböző háromszöget és hány különböző kört kapunk?

A szabályos ötszög köré írt kör minden ilyen háromszögnek a köré írt köre lesz. Vagyis egy kört kapunk.
A háromszögeket felsorolás után meg tudjuk számolni: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE. Vagyis 10 különböző háromszöget kapunk.

8. E1 Adott egy négyszög. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek a négy csúcsától egyenlő távolságban haladnak!

Legyen a négy pont: A, B, C, D. Megszerkesztjük például az ABC háromszög köré írt körét. A kapott kör középpontja K, sugara r. A K középpontú, $\frac{r + KD}{2}$ sugarú kör megfelel a feladat feltételeinek, ugyanis ez mind a négy ponttól $\left|\frac{r - KD}{2}\right|$ távolságra halad.
Ha kiválasztott három pont köré írt körén a negyedik pont is rajta van, akkor bármely K középpontú kör megfelelő lesz.
Mivel négy pont közül hármat kiválasztani négyféleképpen lehet, ezért általános helyzetben négy megoldása van a feladatnak. Ez látható az ábrán.



9. E2 Apollóniosz-féle feladatnak nevezzük a következőt: Szerkesszünk három adott körhöz egy negyediket, amely mindhárom adott kört érinti! Azokat a feladatokat is így nevezzük, amikor a három adott kör bármelyike helyett pont vagy egyenes van adva. Ezek a pontok, egyenesek, körök lesznek az úgynevezett kiinduló elemek.
Tervezzünk meg egy véletlenszerű sorsolást, amelynek segítségével egy Apollóniosz-féle feladat kiinduló elemeit kiválaszthatjuk! Hány kimenetele lehet a sorsolásnak?

Tegyünk egy kartondobozba például három piros, három kék és három rózsaszín kupakot (de bármi lehet, ami alakra egyforma, csak színben különböző). Keverés után vegyünk ki hármat. A piros (P) jelentsen pontot, a kék (K) kört, a rózsaszín (R) pedig egyenest. Így valóban egy Apollóniusz-feladatot sorsoltunk ki.
Lehet hogy mindhárom kihúzott kupak azonos színű: PPP, KKK, RRR.
Lehet, hogy kettő azonos színű: PPK, PPR, KKP, KKR, RRP, RRK.
Lehet, hogy mind különböző színű: PKR.
Vagyis 10 eset lehetséges.

10. A háromszög szögfelezői, beírt és hozzáírt körei

1. K1 Egy háromszögben egy-egy szög 64°-os és 48°-os. Mekkora szöget zár be egymással a két szög belső szögfelezője?

A két szög csúcsa és a szögfelezők metszéspontja egy háromszöget határoz meg. Ennek a háromszögnek két szöge: 32° és 24°. Ezért a harmadik szög: 124°.
Ezek alapján a két szögfelező hajlásszöge a 124° kiegészítő szöge lesz, vagyis: 56°.

2. K2 Mekkora szöget zár be egymással a háromszög két szögfelezője, ha tudjuk, hogy a harmadik szög 76°-os?

A két szög csúcsa és a szögfelezők metszéspontja egy háromszöget határoz meg. Ebben a háromszögben két szög összege: $(180° - 76°):2$, azaz 52°. Ezért a harmadik szög: 128°.
Ezek alapján a két szögfelező hajlásszöge a 128° kiegészítő szöge lesz, vagyis: 52°.

3. K2 Mekkora szöget zár be egymással a háromszög valamely csúcsából induló belső és külső szögfelező?

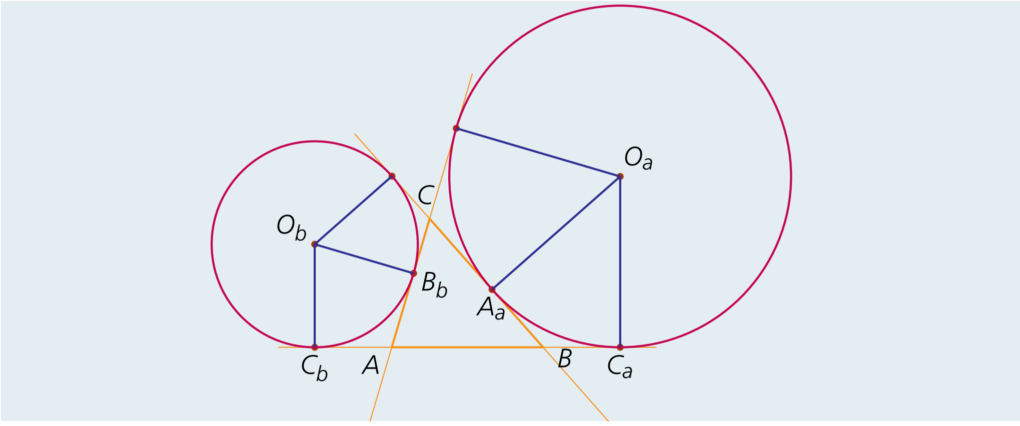
Mivel az egy csúcsnál fekvő belső és külső szögfelező összege 180°, ezért az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező 90°-os szöget zár be egymással.

4. K2 Mekkora a beírt és a köré írt kör sugara az
a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; *b)* $a = 15$ cm, $b = 36$ cm
befogójú derékszögű háromszögben?

a) Mivel derékszögű a háromszög, ezért a köré írt kör a Thalész-kör lesz. Vagyis ennek a körnek az r sugara az átmérő felével egyenlő hosszúságú. Pitagorasz-tétellel: $c = 10$ cm, azaz $r = 5$ cm. A derékszögű háromszög területe: $t = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ (cm²), kerülete: $k = 6 + 8 + 10 = 24$ (cm), ezért a kerületének a fele: $s = 12$ cm. Használjuk a $t = \rho s$ területképletet (ahol ρ a háromszög beírt körének sugara): $\rho = \frac{t}{s} = \frac{24}{12} = 2$ (cm).
b) Az előző gondolatmenetet követve: $r = 19{,}5$ cm, $\rho = 6$ cm.

5. E1 Igazoljuk, hogy $C_aC_b = a + b$, ahol a és b a háromszög oldalai a szokásos jelölés szerint, C_a a c oldalegyenes és az a oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja, C_b a c oldalegyenes és a b oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja!

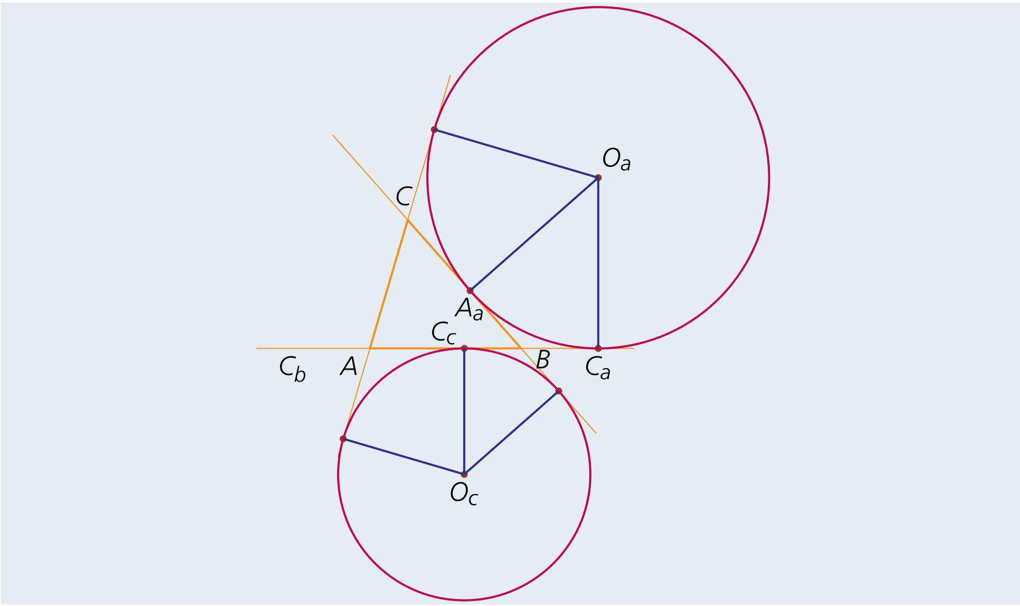
Használjuk az ábra jelöléseit!



Tudjuk, hogy $AC_a = s$, $BC_b = s$, $AB = c$. Vagyis $C_aC_b = 2s - c = a + b$.

6. E2 Igazoljuk, hogy $C_cC_a = b$, ahol a a háromszög oldala a szokásos jelölés szerint, C_c a c oldal és a c oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja, C_a a c oldalegyenes és az a oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja!

Használjuk az ábra jelöléseit!



Mivel $AC_a = s$, $AB = c$, ezért $BC_a = s - c$. Mivel $CA_c = s$, $BC = a$, ezért $BA_c = s - a$. Mivel $BC_c = BA_c$, ezért $BC_c = s - a$. Ezek alapján $C_cC_a = BC_a + BC_c = s - c + s - a = b$.

Megjegyzések:
1. Az előző feladatban láttuk, hogy $C_aC_b = a + b$. Most bizonyítottuk, hogy $C_cC_a = b$. Ezekből következik, hogy $C_bC_c = a$.
2. Megmutatható, hogy AB oldal felezőmerőlegesére BC_c szakasz tükrös, és a tükörképe az AC_o szakasz, vagyis $AC_o = s - a$. Mivel $BC_b = s$, $AB = c$, ezért $AC_b = s - c$.
Ezek alapján $C_bC_0 = s - c + s - a = b$.
3. Az eddigi eredményeinket felhasználva kiszámíthatjuk a C_oC_c szakasz hosszát: $C_oC_c = AB - 2 \cdot BC_c = c - 2(s - a) = c - a - b - c + 2a = a - b$. Felhasználtuk a rajzunkról, hogy $a > b$. Ha ezt nem tudjuk, akkor $C_oC_c = |a - b|$.

11. Sokszögek

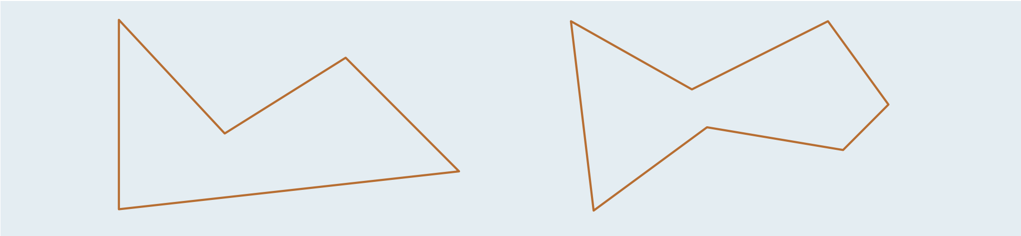
1. K1 Számítsuk ki a
a) 11; *b)* 23; *c)* 108; *d)* 1000
oldalú konvex sokszög belső szögeinek összegét!

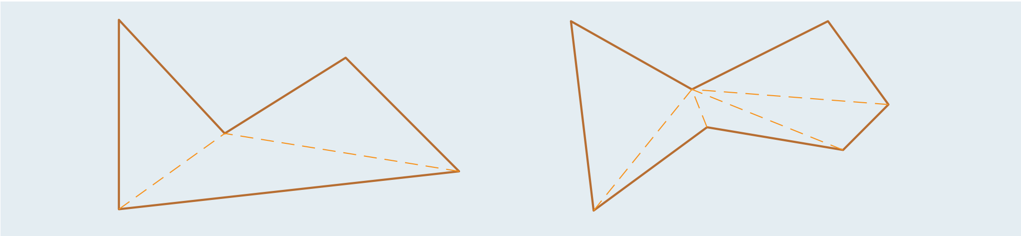
Tudjuk, hogy az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.
a) $(11-2)\cdot 180° = 1620°$; *b)* $(23-2)\cdot 180° = 3780°$;
c) $(108-2)\cdot 180° = 19\,080°$; *d)* $(1000-2)\cdot 180° = 179\,640°$.

2. K1 Számítsuk ki a
a) 13; *b)* 21; *c)* 132; *d)* 500
oldalú konvex sokszög átlóinak számát!

Tudjuk, hogy az n oldalú konvex sokszögben $\frac{n(n-3)}{2}$ átló van.
a) $\frac{13(13-3)}{2} = 65$; *b)* $\frac{21(21-3)}{2} = 189$;
c) $\frac{132(132-3)}{2} = 8514$; *d)* $\frac{500(500-3)}{2} = 124\,250$.

3. K2 Igazoljuk, hogy az ábrán látható konkáv sokszögek belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, ahol n az oldalak számát jelenti!



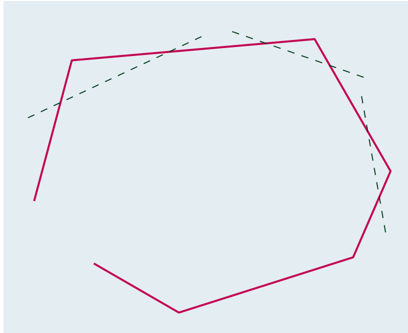


a) Az ábrán látható módon az ötszöget három háromszögre vágjuk. Ezért a belső szögek összege valóban $(5-2)\cdot 180° = 540°$.
b) Az ábrán látható módon a hétszöget öt háromszögre vágjuk. Ezért a belső szögek összege valóban $(7-2)\cdot 180° = 900°$.

4. K2 Hány oldalú lehet az a sokszög, melyben minden szög hegyesszög?

Tudjuk, hogy a konvex sokszögek belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. Ha egy n oldalú sokszögben minden szög kisebb, mint 90°, akkor $(n-2)\cdot 180° < n\cdot 90°$. Azaz $n < 4$.
Vagyis csak háromszögek esetén képzelhető el az, hogy egy sokszög minden szöge hegyesszög.

5. K2 Egy konvex sokszög három csúcsát az ábrán látható módon egy-egy egyenes mentén levágtuk. Hogyan változik ekkor a belső szögek összege?



Ha eredetileg a sokszögnek n oldala volt, akkor a vágás után $n + 3$ oldala lett. Azaz a belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180°$-ról $(n + 1) \cdot 180°$-ra nőtt. Vagyis 540°-kal nőtt a belső szögek összege.

6. E2 *a)* Egy n oldalú sokszög oldalainak számát megduplázzuk. Az oldalszám $f(n)$ függvényeként fejezzük ki, hogy hányszorosára változik a sokszög belső szögeinek összege!
b) Mely egész számokat veszi fel az *a)* részben szereplő $f(n)$ függvény?
c) Adjuk meg azt a legszűkebb intervallumot, amelyben az *a)* részben szereplő $f(n)$ függvény minden függvényértéke megtalálható!

a) Az eredeti sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$, az új sokszögben a szögösszeg: $(2n - 2) \cdot 180°$. Vagyis $f(n) = \dfrac{(2n-2)\cdot 180°}{(n-2)\cdot 180°} = \dfrac{2n-2}{n-2}$-szeresére nő a sokszög szögösszege ($n \geq 3$ egész szám).

b) Mivel $f(n) = \dfrac{(2n-2)\cdot 180°}{(n-2)\cdot 180°} = \dfrac{2n-2}{n-2} = \dfrac{2(n-2)+2}{n-2} = 2 + \dfrac{2}{n-2}$ és $n \geq 3$ egész szám, ezért két egész számot vehet fel az $f(n)$. Ezek a következők: $f(3) = 4$, $f(4) = 3$.

c) Tudjuk, hogy $f(n) = 2 + \dfrac{2}{n-2}$ és $n \geq 3$ egész szám. Az n növekedésével a $\dfrac{2}{n-2}$ csökken, de pozitív marad. Ezeket figyelembe véve: $f(n) \in \,]2; 4]$. Megjegyzés: Minden megengedett n esetén $f(n) \in \,]2; 4]$, de ha $y \in \,]2; 4]$, akkor nem feltétlenül létezik y-hoz megfelelő n szám.

7. E1 Egy sokszögnek szeretnénk megduplázni a belső szögeinek összegét. Hogyan kell változtatni az oldalak számát?

Az eredeti sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$, az új sokszögben a szögösszeg: $(m - 2) \cdot 180°$. A feladat feltétele szerint: $2(n - 2) \cdot 180° = (m - 2) \cdot 180°$, amiből $m = 2n - 2$. Vagyis az eredeti sokszög oldalszámának kétszeresénél kettővel kevesebb oldala legyen az új sokszögnek.

8. E1 Adjuk meg az összes olyan egész számot, amely lehet egy szabályos sokszög belső szögének fokban kifejezett mérőszáma!

A tankönyvi példában már láttuk, hogy 22-féle olyan szabályos sokszög van, amelyben a belső szögek fokokban mért mérőszáma egész szám. Megállapítottuk, hogy az oldalak száma a következő 22 szám lehet:
3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20,
24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.
Az n oldalszám ismeretében a $180° - \dfrac{360°}{n}$ képlettel kiszámítjuk a megfelelő szabályos sokszög egy szögének mérőszámát. A következő számokat kapjuk:
60, 90, 108, 120, 135, 140, 144, 150, 156, 160, 162,
165, 168, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179.

9. E2 Melyek azok a szabályos sokszögpárok, amelyek esetén az egyik sokszög belső szöge a másik sokszög külső szögével egyenlő?

Az n oldalú szabályos sokszög minden szögének nagysága $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Tudjuk, hogy a külső szögek összege minden konvex sokszögben 360°, ezért az m oldalú szabályos sokszög minden külső szögének nagysága $\frac{360°}{m}$. A feladat szövege szerint: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{360°}{m}$, azaz átrendezve: $mn - 2n - 2m = 0$. Ezt $(n-2)(m-2) = 4$ alakban is felírhatjuk. Mivel n és m 2-nél nagyobb egész, ezért csak a $(6; 3), (4; 4), (3; 6)$ számpárok adják a megoldást. Vagyis a szabályos háromszög–szabályos hatszög és a négyzet–négyzet párosítás tesz eleget a feladat feltételeinek.

V. Egyenletek, egyenletrendszerek

1. Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

1. K1 $\frac{1}{2}\cdot\left[2x-\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right]=4x-3(x+2)$.

$x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}=x-6$, azaz $12x-4x-1=12x-72$, ahonnan $x=\frac{71}{4}$.

2. K1 $\frac{3x+2}{4}+\frac{2x+5}{6}=x-\frac{5-x}{3}$.

$9x+6+4x+10=12x-20+4x$, ahonnan $x=12$.

3. K1 $\frac{2x-3}{2+x}=\frac{2(x-3)}{6+x}$.

$(2x-3)(x+6)=(2x-6)(x+2)$, azaz $2x^2+9x-18=2x^2-2x-12$, ahonnan $x=\frac{6}{11}$.

4. K1 $(x+6)(x-5)-(x-3)(2-x)=(2x-1)(x+2)$.

$x^2+x-30-2x+6+x^2-3x=2x^2+3x-2$, ahonnan $x=-\frac{22}{7}$.

5. K2 $\frac{x-5}{x+5}-\frac{x+5}{x-5}+\frac{20x}{x^2-25}=0$.

$\frac{x^2-10x+25-x^2-10x-25+20x}{x^2-25}=0$, azaz $\frac{0}{x^2-25}=0$. Az egyenlet megoldása $|x|\neq 5$ mellett minden valós szám.

6. K1 $6x+12=8x-24$. $x=18$.

7. K1 $\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}$. $x=-1$.

8. K1 $6(x-3)-3(x-4)=2(x+6)$. $x=18$.

9. K1 $\frac{x-3}{3}-\frac{2x-4}{5}=\frac{x+1}{10}-x$. $x=\frac{9}{25}$.

10. K1 $4x-\frac{x+2}{3}-\frac{3x-2}{2}=2-\frac{4x-1}{3}$. $x=\frac{4}{7}$.

11. K1 $x-[2(3x-2)+2x+3]=4(x+6)$. $x=-\frac{23}{11}$.

12. K2 $5x-3\{4x-2[4x-3(5x-2)]\}=182$. $x=-2$.

2. Szöveges feladatok megoldása egyenletekkel

1. K1 Egy háromjegyű számban a 10-esek helyén álló számjegy kettővel nagyobb az egyesek helyén állónál, és eggyel kisebb a százasok helyén álló számjegynél. Ha a számhoz hozzáadjuk a fordítottját, azaz a számjegyeinek fordított sorrendjében felírt számot, eredményül 1453-at kapunk. Mi volt az eredeti háromjegyű szám?

$\overline{abc} + \overline{cba} = 101a + 20b + 101c = 1453$, ahol $b = c + 2$ és $a = c + 3$.
Ezek szerint $101(c + 3) + 20(c + 2) + 101c = 1453$, azaz $222c + 343 = 1453$,
ahonnan $c = 5$, és így $b = 7$, $a = 8$. A keresett szám a 875.

2. K2 Budapestről elindul egy autó Münchenbe reggel 8 órakor állandó 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Fél 10-kor elindul egy másik autó ugyanazon az útvonalon állandó 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Mikor lesz a két autó között a távolság 60 km?

A két autó között a távolság kétszer lesz 60 km. Először akkor, amikor a második autó még az első mögött van, másodszor pedig amikor a második autó már az elsőt megelőzve előtte van. Ha t az első autó menetideje, akkor az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:
$80t = 110(t - 1,5) + 60$, illetve $80t = 110(t - 1,5) - 60$.
Első esetben $t = 3,5$, a második esetben $t = 7,5$. Tehát a két autó között a távolság 11 óra 30-kor, illetve 15 óra 30-kor lesz 60 km.

3. K2 Egy nagy esőzés után vízzel elárasztott pincéből három szivattyúval akarják a vizet kiemelni. Az első és a második szivattyú egyedül 6 óra alatt tudná kiszivattyúzni a vizet a pincéből. A három szivattyút délelőtt 11-kor kapcsolták be, és délután 13 óra 15 percre kiszivattyúzták az összes vizet. Mennyi idő alatt végezne egyedül a szivattyúzással a harmadik szivattyú?

Ha a harmadik szivattyú egyedül x óra alatt szívja ki a vizet a pincéből, akkor
$\frac{2,25}{6} + \frac{2,25}{6} + \frac{2,25}{x} = 1$, azaz $2,25x + 2,25x + 13,5 = 6x$.
Innen $x = 9$. Tehát a 3. szivattyú egyedül 9 óra alatt végezne a munkával.

4. K2 Egy középkori feladat: *„Lészen egy háromszeglemény, melliknek is két gyepüléniái azonos mértékűek vala. Emezekkel szemkesztes kenyeki két tagú naturalis numerandusok vala. Mígnem az harmadik kenyek emezen numerandusok fordítottja vala. Mekkorák az fentebb forgandó triangulum kenyeki?"* – Vagyis:
Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögei fokokban mérve kétjegyű egész számok. A szárszöge e kétjegyű számok fordítottja (vagyis a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám). Mekkorák a háromszög szögei?

A feltételek szerint $2 \cdot \overline{ab} + \overline{ba} = 180$. Részletesen kiírva
$21a + 12b = 180$, azaz $7a + 4b = 60$.
Mivel a jobb oldal 4-gyel osztható, ezért a bal oldalnak is 4-gyel oszthatónak kell lennie, azaz $7a$ osztható 4-gyel, vagyis a osztható 4-gyel. Tehát $a = 4$, vagy $a = 8$. Ha $a = 4$, akkor $b = 8$, ha pedig $a = 8$, akkor $b = 1$. A háromszög szögei:
48°, 48°, 84° vagy 81°, 81°, 18°.

5. K2 András és Béla együtt 36 évesek. Amikor András annyi idős lesz, mint Béla most, akkor Béla éveinek száma 16-tal lesz több, mint András éveinek mostani száma. Hány évesek most?

Ha András most a éves, akkor Béla $36 - a$ éves. Amíg András annyi idős lesz, mint Béla most, azaz $36 - a$ éves, addig $36 - a - a = 36 - 2a$ év telik el. Ennyi év múlva Béla $36 - a + 36 - 2a = 72 - 3a$ éves lesz. A feltételek szerint
$72 - 3a - 16 = a$, ahonnan $a = 14$.
Tehát András jelenleg 14 éves, Béla pedig 22 éves.

6. K1 1000 Ft-ot felváltottunk 20 és 50 Ft-os érmékre. Összesen 32 db érmét kaptunk. Hány db 20 és hány db 50 Ft-os érménk lett?

Ha x db 20 Ft-os van, akkor a megoldandó egyenlet:
$20x + 50(32 - x) = 1000$.
$x = 20$, tehát 20 db 20 Ft-os és 12 db 50 Ft-os érménk van.

7. K1 Három testvér közül a középső 11 éves, a legidősebb ötször annyi idős, mint a legfiatalabb. A három testvér együttes életkora eggyel kevesebb, mint amennyi idős lesz a legidősebb akkor, amikor kétszer annyi idős lesz, mint most. Hány évesek a testvérek?

Legyen a legfiatalabb x éves. Ekkor $x + 11 + 5x + 1 = 10x$, ahonnan $x = 3$. A testvérek életkora: 3, 11 és 15 év.

8. K2 Az A és B helységek között a távolság 240 km. A-ból B-be elindul reggel 6 órakor egy vonat 64 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. 7-kor B-ből indul egy vonat A-ba 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Mikor lesz a távolság közöttük 40 km?

Kétszer lesz a két vonat között a távolság 40 km. Ha t az A helységből induló vonat menetideje, akkor egymás felé közeledve:
$64t + 80(t - 1) + 40 = 240$, ahonnan $t = 1{,}94$ óra.
Egymástól távolodva:
$64t + 80(t - 1) - 40 = 240$, ahonnan $t = 2{,}5$ óra.
A két vonat kb. 7 óra 57 perckor, illetve 8 óra 30 perckor lesz egymástól 40 km távolságra.

9. E1 Csaba reggel 9 órakor elindult kerékpárral, hogy a városban lakó nagymamáját meglátogassa. Állandó 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt, és másfél órát töltött a nagyinál. Visszafelé – ugyancsak állandó sebességgel haladva – már sietett haza, sebességét 10%-kal növelve $\frac{3}{4}$ 3 előtt 3 perccel ért haza. Milyen távol lakik a nagymama?

Csaba összesen 5,7 órát töltött távol. Ebből 1,5 órát volt nagymamájánál, 4,2 órát volt úton. Ha a kérdéses távolság S, akkor $\frac{S}{20} + \frac{S}{22} = 4{,}2$, ahonnan $S = \frac{924}{21} = 44$ km.

10. E1 Egy kocsmáros a 12 liter 40%-os pálinkáját – hogy nagyobb nyereségre tegyen szert – hígítani akarta. Ismert, hogy 10%-nál nagyobb töménység esetén 2%-os eltérést műszer nélkül még nem lehet észrevenni. Ezt tudja a kocsmáros is. Legfeljebb hány dl vízzel hígíthatja pálinkáját, hogy még ne vegyék észre a csalást a fogyasztók?

A pálinka tisztaszesz-tartalma 4,8 liter. A hígítás után legalább 38%-osnak kell lennie.
$\frac{4{,}8}{12 + x} \cdot 100 \geq 38$, ahonnan $x \leq 0{,}6316$ l.
Tehát legfeljebb 6,3 dl vízzel hígíthatja pálinkáját a kocsmáros.

3. Egyenletek megoldási módszerei

1. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(2x+1)(x-4)+3(2x+1)=6(2x+1)$;

b) $(4-x)-12+3x=2x-8$.

a) Rendezzük 0-ra az egyenletet, majd emeljünk ki $(2x+1)$-et.

$(2x+1)(x-4)+3(2x+1)-6(2x+1)=0$, azaz $(2x+1)(x-7)=0$.

Innen $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=7$.

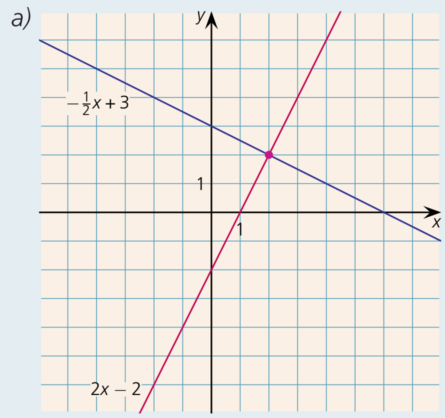
b) Az egyenlet így alakítható:

$(4-x)-3(4-x)+2(4-x)=0$, azaz $(4-x)(3-3)=0$.

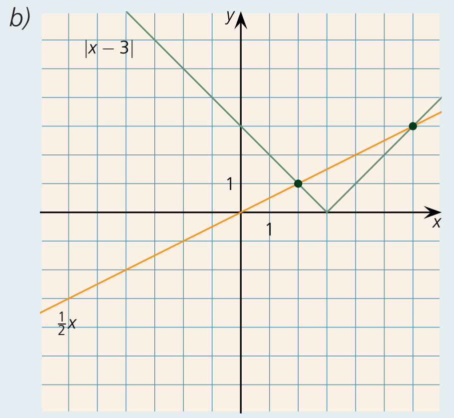
Azonossághoz jutottunk, vagyis az egyenletet minden valós szám kielégíti.

2. K2 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

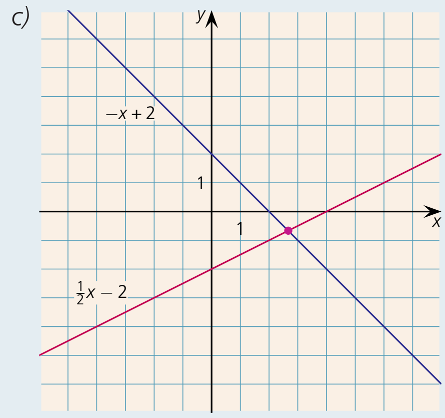
a) $2x-2=-\frac{1}{2}x+3$; *b)* $|x-3|=\frac{1}{2}x$; *c)* $\frac{x-4}{2}=-x+2$.



Az ábra alapján az egyenlet megoldása $x=2$.



Az ábra alapján az egyenlet megoldása $x_1=2$, $x_2=6$.



Az egyenlet megoldása – az ábra alapján – $x=\frac{8}{3}$, amit helyettesítéssel ellenőrizhetünk.

3. E1 Mely x, y valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőségeket?

a) $x^2-6x+9+y^2-2y+1=0$;

b) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{6-3x}+2xy=x^2-4y+3$;

c) $\frac{1}{x^2-4x+6}=\frac{2y^2+12y+19}{2}$.

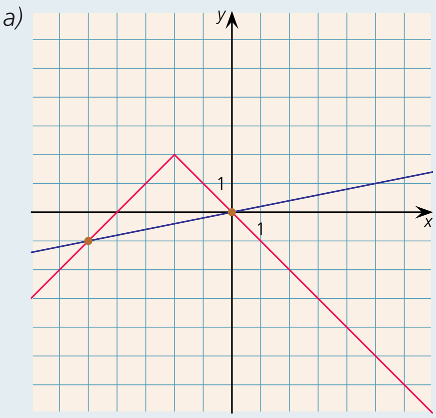
a) Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán teljes négyzetek szerepelnek.
$(x-3)^2+(y-1)^2=0.$
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a bal oldal mindkét tagja 0, vagyis $x=3,\ y=1$.

b) A négyzetgyökök miatt $2x-4\geq 0$, azaz $x\geq 2$ és $6-3x\geq 0$, azaz $x\leq 2$. Ezek szerint csak $x=2$ lehetséges. Ezzel az egyenlet így alakul:
$4y=y-4y+3$, ahonnan $y=\frac{3}{7}$.

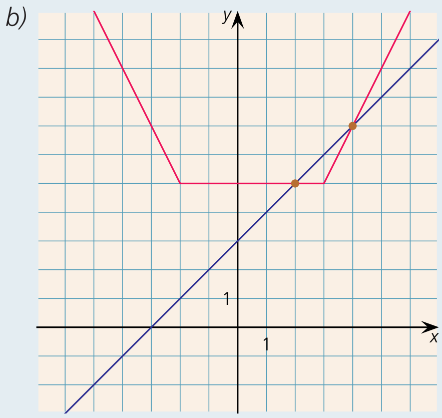
c) Az egyenlet bal oldala: $\frac{1}{(x-2)^2+2}$. Mivel a nevező értéke legalább 2, így a tört értéke legfeljebb $\frac{1}{2}$. Az egyenlet jobb oldala:
$y^2+6y+\frac{19}{2}=(y+3)^2-9+\frac{19}{2}=(y+3)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}.$
Mivel a bal oldal legfeljebb $\frac{1}{2}$, a jobb oldal legalább $\frac{1}{2}$, így az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal értéke $\frac{1}{2}$. Ekkor $x=2,\ y=-3$.

4. E1 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

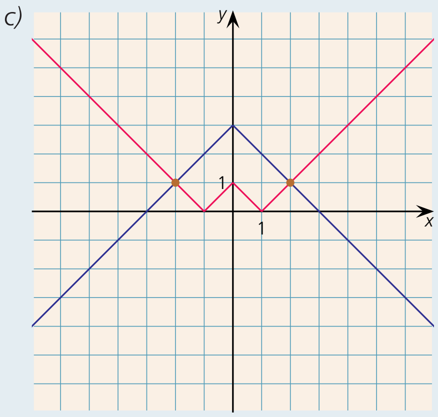
a) $2-|x+2|=\frac{1}{5}x$; *b)* $|x-3|+|x+2|=x+3$; *c)* $||x|-1|=3-|x|$.



$x_1=-5,\ x_2=0.$



$x_1=2,\ x_2=4.$



$x=\pm 2.$

4. Egyenlőtlenségek

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{4x+2}{3} \le x+4$; *b)* $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \le 2x-2$; *c)* $3[x-2(x+3)] > 2[x-3(x-3)]$.

a) $x \le 10$; *b)* $x \ge \frac{17}{11}$; *c)* $x > 36$.

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{2x+3}{x-4} \le 0$; *b)* $\frac{x+3}{2x-4} > 1$; *c)* $(x+3)(4x-6) > 0$.

a) Egy tört értéke akkor negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.
$2x+3 \ge 0$ és $x-4 < 0$ vagy $2x+3 \le 0$ és $x-4 > 0$.
Első esetben $x \ge -\frac{3}{2}$ és $x < 4$. A második esetben pedig $x \le -\frac{3}{2}$ és $x > 4$, ami nyilván lehetetlen. Tehát az eredeti egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $-\frac{3}{2} \le x < 4$.

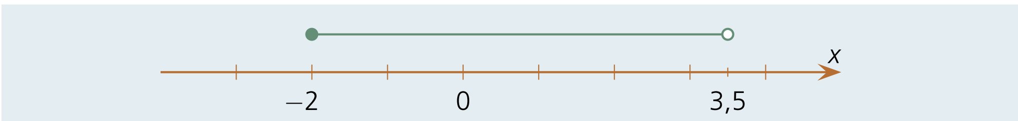
b) Vegyünk el mindkét oldalból 1-et, majd vonjuk össze a kapott két tagot.
$\frac{x+3}{2x-4} - 1 > 0$, tehát $\frac{x+3}{2x-4} - \frac{2x-4}{2x-4} > 0$, ahonnan $\frac{-x+7}{2x-4} > 0$.
Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a számláló és a nevező azonos előjelűek. Az eredeti egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $2 < x < 7$.

c) Egy kéttényezős szorzat akkor és csak akkor pozitív, ha tényezői azonos előjelűek. Az eredeti egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $x < -3$ vagy $x > \frac{3}{2}$.

3. K1 Ábrázoljuk a számegyenesen azokat az x valós számokat, melyek mindkét egyenlőtlenséget kielégítik!

$\frac{2x+4}{3} \le x+2$, $x-2 < \frac{x+1}{3}$.

Az első egyenlőtlenség megoldása: $-2 \le x$, a második megoldása: $x < \frac{7}{2}$. Tehát a mindkét egyenlőtlenséget kielégítő valós számok a számegyenesen:



4. E1 Határozzuk meg a $p > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenlet megoldása pozitív legyen!

$\frac{x+p}{2} - x = \frac{px+3}{3}$.

Először oldjuk meg az egyenletet. Mindkét oldalt 6-tal beszorozva, majd rendezve, azt kapjuk:
$3x+3p-6x = 2px+6$, azaz $x(2p+3) = 3p-6$.
Mivel $p > 0$, ezért $2p+3 \ne 0$, így az egyenlet megoldása: $x = \frac{3p-6}{2p+3}$. Meg kell oldanunk a $\frac{3p-6}{2p+3} > 0$ egyenlőtlenséget. A nevező pozitív, így a tört értéke akkor és csak akkor pozitív, ha a számláló is pozitív, vagyis $3p-6 > 0$, ahonnan $p > 2$.

5. K1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{x+3}{4} + \frac{x+1}{2} \le x-2$; *b)* $2(x-1)+3(2x+6) > 8(x-3)$.

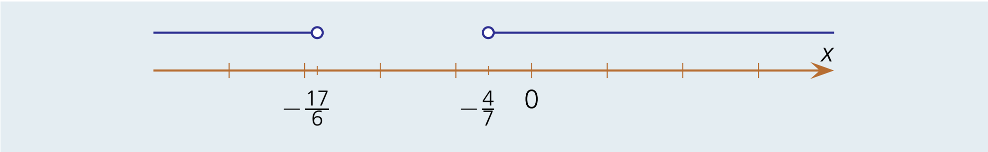
a) $13 \le x$; *b)* Az egyenlőtlenséget minden valós szám kielégíti.

6. K2 Ábrázoljuk a számegyenesen azokat az x valós számokat, amelyek egyszerre mindkét egyenlőtlenséget kielégítik!

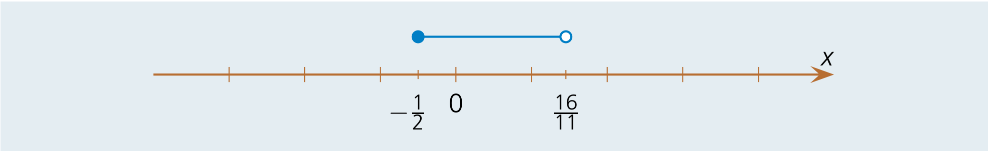
a) $\frac{x-3}{5}+\frac{2x-2}{2}>6(x+2)$, $\quad\frac{x}{4}-1<2x$;

b) $x(x-1)-x(x+3)\le 2x+3$, $\quad\frac{2x-4}{3}+2x<4-x$.

a) Nincs olyan valós szám, mely mindkét egyenlőtlenségnek megfelel.



b) $-\frac{1}{2}\le x<\frac{16}{11}$.



7. E1 Mekkora legyen az a paraméter értéke, hogy az alábbi egyenlet megoldása legalább 1 legyen?

$\frac{ax+2}{3}+a+x=\frac{2x-a}{4}+2.$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 12-vel!

$4ax+8+12a+12x=6x-3a+24$,

$4ax+6x=16-15a$, azaz $x(4a+6)=16-15a$.

Ha $a=-\frac{3}{2}$, akkor – visszahelyettesítve ezt az eredeti egyenletbe – ellentmondáshoz jutunk, tehát ez esetben nincs megoldás. Ha $a\ne-\frac{3}{2}$, akkor az egyenlet megoldása $x=\frac{16-15a}{2(2a+3)}$.

Ez (a 2. *b)* feladat megoldásában közölt gondolatmenetet követve) akkor és csak akkor lesz legalább 1, ha $-\frac{3}{2}<a\le\frac{10}{19}$.

8. E2 Mekkora legyen a p paraméter értéke, hogy a következő egyenlet megoldása pozitív egész szám legyen?

$\frac{2x+p}{2}-1=\frac{px-1}{3}.$

A közös nevezővel szorozva azt kapjuk:

$6x+3p-6=2px-2$, azaz $2x(p-3)=3p-4$.

Ha $p=3$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $p\ne 3$, akkor az egyenlet megoldása $x=\frac{3p-4}{2p-6}$.

Végezzük el a következő átalakítást:

$\frac{3p-4}{2p-6}=\frac{2p-6}{2p-6}+\frac{p+2}{2p-6}=1+\frac{p+2}{2p-6}.$

Ez akkor és csak akkor lesz pozitív egész, ha $\frac{p+2}{2p-6}$ nemnegatív egész. Ekkor egyrészt $p>3$ kell hogy legyen, másrészt $p+2\ge 2p-6$, ahonnan $p\le 8$. Mivel a nevező páros, így a számlálónak is párosnak kell lennie, tehát $p=8$, 6 vagy 4 lehet csak. De $p=6$ esetén a tört értéke nem egész, míg $p=8$ és $p=4$ esetén igen, így az eredeti egyenlet megoldása akkor és csak akkor lesz pozitív egész, ha $p=4$ vagy $p=8$.

5. Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $|2x+6|=4$; *b)* $|3-2x|=2$; *c)* $|x+1|=2x-1$.

a) $x_1=-1,\quad x_2=-5$; *b)* $x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{5}{2}$; *c)* $x=2$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
a) $|2x-3|=10$; *b)* $|6x+3|<1$; *c)* $|5x-1|\ge 4$.

a) $x_1=\frac{13}{2},\quad x_2=-\frac{7}{2}$; *b)* $-\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3}$; *c)* $x\le-\frac{3}{5}$ vagy $1\le x$.

3. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $|x+3|+2x-4=2(x-2)$; *b)* $||x|-1|=2$; *c)* $||x-2|+4|=6$.

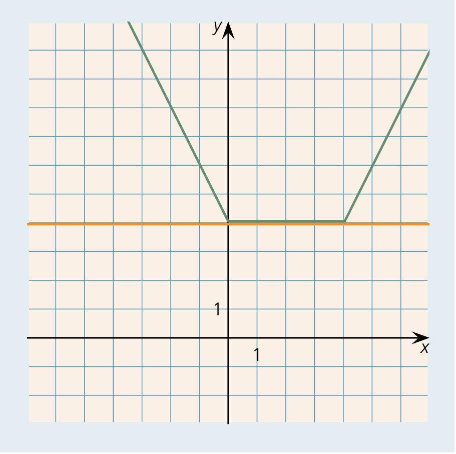
a) Ha $x\ge-3$, akkor az eredeti egyenlet így írható:
$x+3+2x-4=2x-4$, ahonnan $x=-3$.
Ha $x<-3$, akkor az eredeti egyenlet $-x-3+2x-4=2x-4$, ahonnan $x=-3$. Mivel esetünkben $x<-3$, így nem kapunk új megoldást. Tehát az eredeti egyenlet egyedüli megoldása: $x=-3$.

b) Az egyenletből $|x|-1=\pm 2$, azaz $|x|=3$ vagy $|x|=-1$. Ez utóbbi nyilván lehetetlen, így az eredeti egyenlet megoldása: $x=\pm 3$.

c) Az egyenletből $|x-2|+4=\pm 6$, ahonnan $|x-2|=2$ vagy $|x-2|=-10$. Ez utóbbi nem lehetséges, így $|x-2|=2$, azaz $x-2=\pm 2$, ahonnan az egyenlet megoldása: $x_1=0$, $x_2=4$.

4. E1 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket?
a) $|x-4|+|x|\ge 4$; *b)* $|x-2|-|x|<1$.

a) Ábrázoljuk grafikusan az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezést!
Ha $x\ge 4$, akkor $|x-4|+|x|=x-4+x=2x-4$.
Ha $0\le x<4$, akkor $|x-4|+|x|=-x+4+x=4$.
Ha $x<0$, akkor $|x-4|+|x|=-x+4-x=-2x+4$.



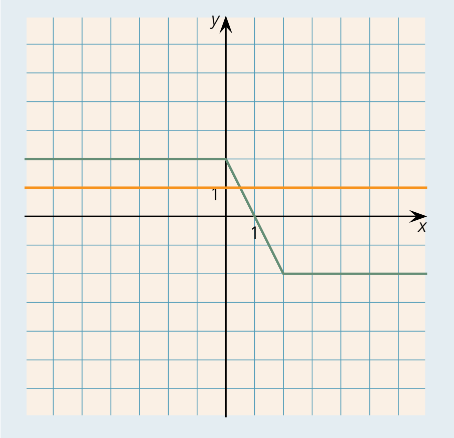
Az egyenlőtlenség megoldása: minden valós szám.

b) Ábrázoljuk grafikusan az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezést!

Ha $x \geq 2$, akkor $|x-2|-|x| = x-2-x = -2$.

Ha $0 \leq x < 2$, akkor $|x-2|-|x| = -x+2-x = -2x+2$.

Ha $x < 0$, akkor $|x-2|-|x| = -x+2+x = 2$.



Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $x > \frac{1}{2}$.

5. E2 Mekkora legyen az *a* és *b* paraméterek értéke, hogy a következő egyenletnek végtelen sok megoldása legyen?

$||x-2|+|x|-4| = ax+b$.

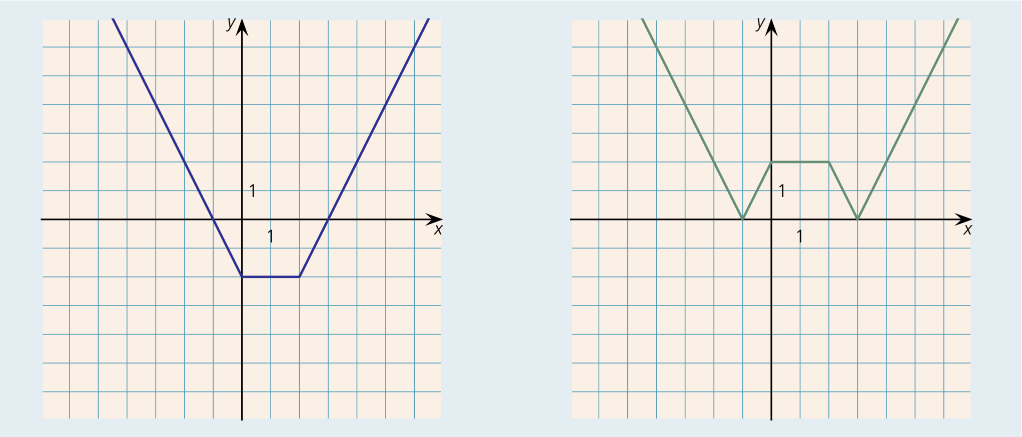
Ábrázoljuk grafikusan az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő külső abszolút értéken belüli kifejezést, vagyis az $f(x) = |x-2|+|x|-4$ függvény grafikonját!

Ha $x \geq 2$, akkor $|x-2|+|x|-4 = x-2+x-4 = 2x-6$.

Ha $0 \leq x < 2$, akkor $|x-2|+|x|-4 = -x+2+x-4 = -2$.

Ha $x < 0$, akkor $|x-2|+|x|-4 = -x+2-x-4 = -2x-2$.

Az $f(x) = |x-2|+|x|-4$ függvény grafikus képét a bal oldali ábrán szemléltettük. Ebből úgy kapjuk meg az eredeti egyenlet bal oldalának grafikonját, hogy a negatív értékeket, vagyis az *x* tengely „alatti” részt tengelyesen tükrözzük az *x* tengelyre (jobb oldali ábra).



Az eredeti egyenlet jobb oldala: $g(x) = ax+b$ lineáris; grafikus képe egyenes. Az egyenletnek akkor van végtelen sok megoldása, ha a jobb oldal grafikus képének végtelen sok közös pontja van a bal oldali kifejezés grafikus képével.

Az *a* és *b* paraméterek lehetséges értékei:

$a = 2, \quad b = -6.$

$a = -2, \quad b = 6.$

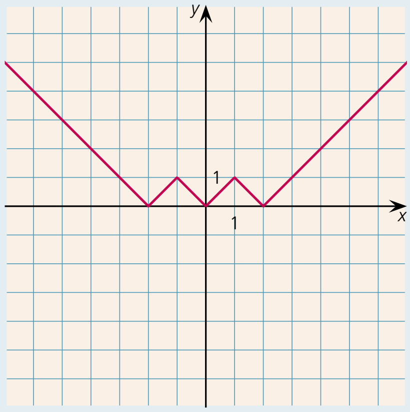
$a = 0, \quad b = 2.$

$a = 2, \quad b = 2.$

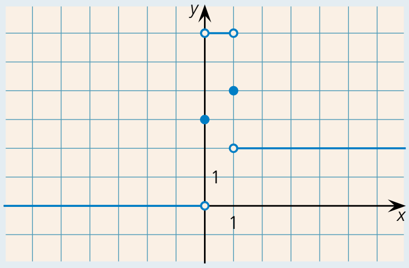
$a = -2, \quad b = -2.$

6. E2 Ábrázoljuk az $m(k)$ függvényt, ahol m a következő egyenlet megoldásainak a száma!
$\left|\left||x|-1\right|-1\right| = k.$

Az egyenlet bal oldalának grafikus képét az ábrán látjuk.



A jobb oldal grafikus képe egy x tengellyel párhuzamos egyenes. A megoldások száma a két grafikon metszéspontjainak a száma.
Ha $k < 0$, a megoldások (mo) száma 0. Ha $k = 0$, mo: 3, ha $0 < k < 1$; mo: 6, ha $k = 1$, mo: 4, végül ha $1 < k$, mo: 2. Ennek megfelelően az $m(k)$ függvény grafikonja az alábbi:



6. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek és megoldásuk behelyettesítő módszerrel

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!
a) $4x + y = 10,\ 3x - 4y = 17;$ *b)* $6x + 5y = 8,\ 2x - 10y = -\frac{20}{3}.$

a) $x = 3,\quad y = -2;$ *b)* $x = \frac{2}{3},\quad y = \frac{4}{5}.$

2. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$2(x - 4) + 4y = 3(2y + 2);$ $\frac{x + y}{5} = 3(6x + y) - 1.$

A megadott egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $x - y = 7,\ 89x + 14y = 5.$
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1,\ y = -6.$

3. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$\frac{x + 1}{2} - y = \frac{5}{2};$ $\frac{x - 2y}{3} + \frac{4y - x}{2} = -\frac{3}{2}.$

Az egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $x - 2y = 4,\ -x + 8y = -9.$
Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{7}{3},\ y = -\frac{5}{6}.$

4. K1 Mekkora legyen a p és q paraméterek értéke, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) ne legyen megoldása;
b) végtelen sok megoldása legyen;
c) egyetlen megoldása legyen?
$3x - 4y = 11$,
$2x + py = q$.

Ha az első egyenlet bal oldala a másodiknak másfélszerese, akkor vagy nincs megoldás, vagy végtelen sok megoldás van. Ha $\frac{3}{2}p = -4$, akkor $p = -\frac{8}{3}$. Ha $\frac{3}{2}q = 11$, akkor $q = \frac{22}{3}$.

a) $p = -\frac{8}{3}$, $q \neq \frac{22}{3}$; *b)* $p = -\frac{8}{3}$, $q = \frac{8}{3}$; *c)* $p \neq -\frac{8}{3}$, q tetszőleges.

5. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!
a) $2x + 3y = 8$, $x - 2y = -10$; *b)* $2x - 5y = 10$, $-4x + 10y = 19$.

a) $x = -2$, $y = 4$; *b)* nincs megoldás.

6. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!
a) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{6}$, $x + 5y = 6$; *b)* $\frac{2}{5}x + \frac{5}{2}y = -\frac{1}{10}$, $x + y = -2$.

a) Az egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $4x - 3y = 1$, $x + 5y = 6$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = y = 1$.
b) Az egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $4x + 25y = -1$, $x + y = -2$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = -\frac{7}{3}$, $y = \frac{1}{3}$,

7. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán az egyenlő együtthatók módszerével!
a) $2x + y = 13$, $3x - y = 2$; *b)* $7x - 3y = 15$, $5x + 6y = 27$; *c)* $4x + 3y = 6$, $6x + 5y = -7$.

a) $x = 3$, $y = 7$; *b)* $x = 3$, $y = 2$; *c)* $x = \frac{51}{2}$, $y = -32$.

2. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán az egyenlő együtthatók módszerével!
$$\frac{x+y-2}{5} + \frac{x-y-1}{3} = -\frac{8}{15}, \quad x + \frac{3y}{2} = \frac{5}{4}.$$

A megadott egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $8x - 2y = 3$, $4x + 6y = 5$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = y = \frac{1}{2}$.

3. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!
a) $\frac{6x-2y}{5} - 2x = y - \frac{10}{3}x + 1$, $\frac{4x-3y}{3} + \frac{8x-3y}{2} = y + 1$;
b) $\frac{x+1}{3} - \frac{2x-2y}{5} = \frac{y+2}{4}$, $\frac{x-3}{4} - 2y = \frac{y-3}{3} - x$.

a) Az egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $38x - 21y = 15$, $32x - 21y = 6$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{3}{2}$, $y = 2$.
b) Az egyenletrendszer egyszerűbb alakja: $-4x + 9y = 10$, $15x - 28y = -3$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 11$, $y = 6$.

4. K2 Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszereknek ne legyen megoldása!

a) $2x+7y=11{,}7,\quad -4x+ay=5{,}6;$ *b)* $3x-\frac{2}{7}y=4,\quad ax+(a+1)y=2.$

a) Az egyenletrendszernek akkor nincs megoldása, ha az egyik egyenlet bal oldala a másik egyenlet bal oldalának valamilyen számszorosa, de a jobb oldala a másik egyenlet jobb oldalának nem ugyanannyiszorosa. $\frac{-4}{2}=\frac{a}{7}$, ahonnan $a=-14$. Ezzel a második egyenlet bal oldala az első egyenlet bal oldalának -2-szerese; de a jobb oldala az első egyenlet jobb oldalának nem -2-szerese. Tehát az egyenletrendszernek akkor nincs megoldása, ha $a=-14$.

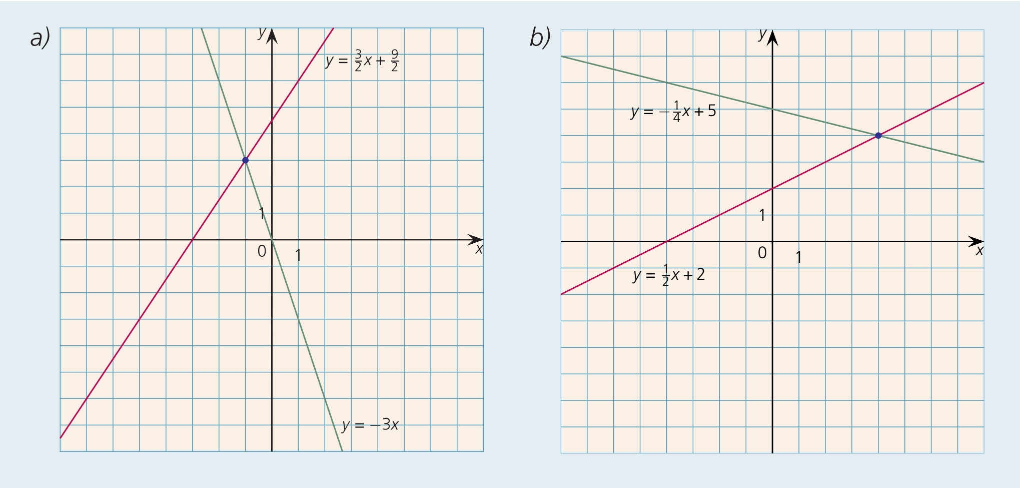
b) $\frac{a}{3}=-\frac{a+1}{\frac{2}{7}}$, ahonnan $a=-\frac{21}{23}$.

Az egyenletrendszernek akkor nincs megoldása, ha $a=-\frac{21}{23}$.

8. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása grafikus módszerrel

1. K1 Oldjuk meg grafikusan az alábbi kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszereket!

a) $3x+y=0,\quad -3x+2y=9;$ *b)* $-x+2y=4,\quad x+4y=20.$



Az egyenletrendszer megoldása a grafikon alapján: $x=-1,\quad y=3.$

Az egyenletrendszer megoldása a grafikon alapján: $x=y=4.$

2. K1 Adjunk meg olyan kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszert, amelynek megoldása:

a) $x=-4,\ y=5;$ *b)* $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{2}{3}$!

a) Pl.: $2x+y=-3,\quad 3x+2y=-2;$ *b)* Pl.: $2x+3y=5,\quad 4x+9y=12.$

3. K2 Adott egy egyenletrendszer: $3x-5y=14,\ 2x+ay=-2$. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása!

Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha az egyik egyenlet bal oldala a másik egyenlet bal oldalának valamilyen számszorosa, de a jobb oldala nem ugyanannyiszorosa. $\frac{3}{2}a=-5$, ahonnan $a=-\frac{10}{3}$. Mivel $14\neq\frac{3}{2}\cdot(-2)$, ezért az a-ra kapott érték esetén valóban nincs megoldása az egyenletrendszernek.

4. K1 Adjunk meg olyan kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszert, melynek gyökei: $x = \frac{1}{5}$, $y = 7$.

Pl.: $10x + 3y = 23$, $5x - 2y = -13$.

9. Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok

1. K1 Ha egy tört számlálójához 1-et hozzáadunk, akkor a tört értéke 1 lesz. Ha a tört nevezőjéhez adunk 5-t, akkor a tört értéke $\frac{1}{2}$ lesz. Melyik ez a tört?

A feladat szövege alapján az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:
$\frac{x+1}{y} = 1$, $\frac{x}{y+5} = \frac{1}{2}$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 6$, $y = 7$, tehát a keresett tört: $\frac{6}{7}$.

2. K1 Egy kétjegyű számhoz hozzáadtuk a „fordítottját", azaz a számjegyeik felcserélésével adódó kétjegyű számot, és eredményül 77-et kaptunk. Ha az eredeti számot elosztjuk a „fordítottjával", akkor a maradék is és a hányados is 2. Melyik kétjegyű számról van szó?

A feladat szövegéből az alábbi egyenletrendszer adódik:
$\overline{ab} + \overline{ba} = 77$, $\frac{\overline{ab} - 2}{\overline{ba}} = 2$.
Az első egyenletből $a = 7 - b$; ezzel a második egyenletből $54 = 27b$ adódik, vagyis $b = 2$, $a = 5$.
A keresett szám: 52.

3. K1 Egy háromszög legnagyobb szöge a másik két szög számtani közepénél 33°-kal nagyobb. A nagyság szerint középső szög annyival nagyobb a legkisebb szögnél, amennyivel kisebb a legnagyobb szögnél. Mekkorák a háromszög szögei?

Legyenek a háromszög szögei: $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. A feltételek szerint
$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} + 33$, $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ és $\alpha + \beta + \gamma = 180$.
A második egyenletből $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Innen az $\alpha + \gamma = 2\beta$ kifejezést a harmadik egyenletbe helyettesítve $\beta = 60$. Így $\alpha + \gamma = 120$, azaz $\gamma = 120 - \alpha$. Ezzel az első egyenlet így alakul:
$\alpha = \frac{60 + 120 - \alpha}{2} + 33$, ahonnan $\alpha = 82$.
A háromszög szögei: $\alpha = 82°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 38°$.

4. K1 Egy farmon csirkéket és nyulakat tartanak. Összes fejeik száma 46, összes lábaik száma 160. Hány csirke és hány nyúl van a farmon?

Legyen c a csirkék, n a nyulak száma. Ekkor $c + n = 46$, $2c + 4n = 160$.
Az egyenletrendszer megoldása: $c = 12$, $n = 34$.

5. K2 Egy kereskedő 50 kg narancsot vásárolt 12 000 Ft-ért. A narancsokat két részre válogatta szét; a szebbik részét 15%-os haszonnal, a kevésbé szépeket 5%-os veszteséggel adta el, így összesen 936 Ft haszonra tett szert. Hány kg narancsot adott el nyereséggel, és mennyit veszteséggel?

A kereskedő a narancs kilóját 240 Ft-ért vásárolta. Legyen x kg az 50 kg narancs szebbik része, y kg a kevésbé szép része. Ekkor
$x + y = 50$ és $240 \cdot 1{,}15x + 240 \cdot 0{,}95y = 12\,936$.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 32$, $y = 18$.

6. E1 Két testvér életkorának összege 32 év. Amikor életkoraik összege ennek duplája lesz, akkor a fiatalabb testvér életkora annyi lesz, mint az idősebb életkora most. Hány évesek a testvérek?

Legyenek az életkorok $a < b$. Ekkor $a + b = 32$ és $3b - a = 64$.
Az egyenletrendszer megoldása: $a = 8$, $b = 24$.

7. E1 András adott Bélának annyi pénzt, amennyi pénze Bélának éppen volt. Így a két fiúnak ugyanannyi pénze lett. Ezután Béla adott Andrásnak feleannyi pénzt, amennyi pénze Andrásnak eredetileg volt, így Andrásnak 66 Ft-tal több pénze lett, mint Bélának. Hány forintjuk volt eredetileg?

Ha Andrásnak a, Bélának b forintja volt eredetileg, akkor
$a - b = 2b$ és $a - b + \frac{a}{2} = 2b - \frac{a}{2} + 66$.
Az egyenletrendszer megoldása: $a = 66$, $b = 22$.

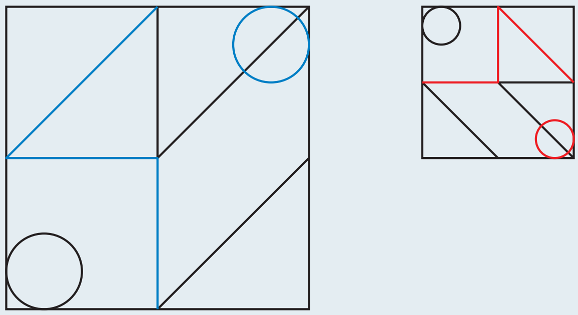
8. E1 Egy motorcsónak 25 km-t tett meg fölfelé a Dunán, majd visszafordult és visszament kiindulási helyére. Az egész utat összesen 5 óra alatt tette meg. Egy másik alkalommal – ugyanakkora sebességgel haladva – 10 km-t ment felfelé a Dunán, majd visszafordult és 4 km-t tett meg lefelé; összesen 1,5 óra alatt. Mekkora a folyó sebessége?

Legyen v_c a csónak, v_D a Duna sebessége. Ekkor
$\frac{25}{v_c - v_D} + \frac{25}{v_c + v_D} = 5$ és $\frac{10}{v_c - v_D} + \frac{4}{v_c + v_D} = \frac{3}{2}$.
Bevezetve az $a = \frac{1}{v_c - v_D}$, $b = \frac{1}{v_c + v_D}$ új ismeretleneket, arra jutunk, hogy $a = \frac{7}{60}$, $b = \frac{1}{12}$, tehát $v_c + v_D = 12$ és $v_c - v_D = \frac{60}{7}$. A két egyenlet különbségéből $2v_D = \frac{24}{7}$. Innen a Duna sebessége: $v_D = \frac{12}{7} \approx 1{,}71\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

VI. Geometriai transzformációk

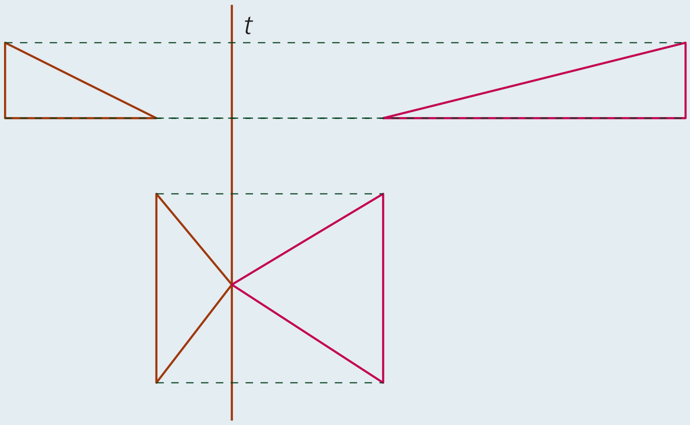
1. Néhány geometriai transzformáció

1. K1 Az ábrán bejelöltünk néhány részletet színessel. Keressük meg a jobb oldali ábrán is ezeket a részleteket!



2. K1 Rajzoltunk egy *t* egyenest. A *t* tengelyen lévő pontok helyben maradnak, a rajzunk síkjában lévő összes többi pont megváltoztatja a helyét. Minden pont kétszer olyan messzire kerül a *t* egyenestől, mint eddig volt, de az egyenes által meghatározott másik félsíkban. A pontból és a képéből a *t* tengelyre állított egy-egy merőleges egyenes talppontja egybeesik. Hogyan változik a képen látható alakzatok képe? Rajzoljuk meg!

A rajz mutatja a megoldást:



3. K2 A koordinátasíkon egy transzformáció minden pont első koordinátáját az ellentettjére változtatja, a második koordinátáját pedig megfelezi.

a) Adjuk meg a következő pontok képét: $A(-2; 6)$, $B(-5; 2)$, $C(-2; 5)$!

b) Adjuk meg azokat a pontokat, amelyek képeként a következő pontokat kaptuk: $K'(1; 2)$, $L'(-3; -1)$, $M'(5; 1{,}5)$!

a) Az új pontok koordinátái: $A'(2; 3)$, $B'(5; 1)$, $C'\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

b) Az eredeti pontok koordinátái: $K(-1; 4)$, $L(3; -2)$, $M(-5; 3)$.

4. E1 A koordinátasíkon legyen az f transzformáció az x tengelyre történő tükrözés, a g transzformáció pedig a $K(1; 2)$ pontra tükrözés. Adottak az $A(1; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(4; 0)$ pontok. Rajzoljuk le az adott pontokat, és írjuk fel koordinátáikat az

a) f; *b)* g; *c)* gf; *d)* fg

transzformációk után!

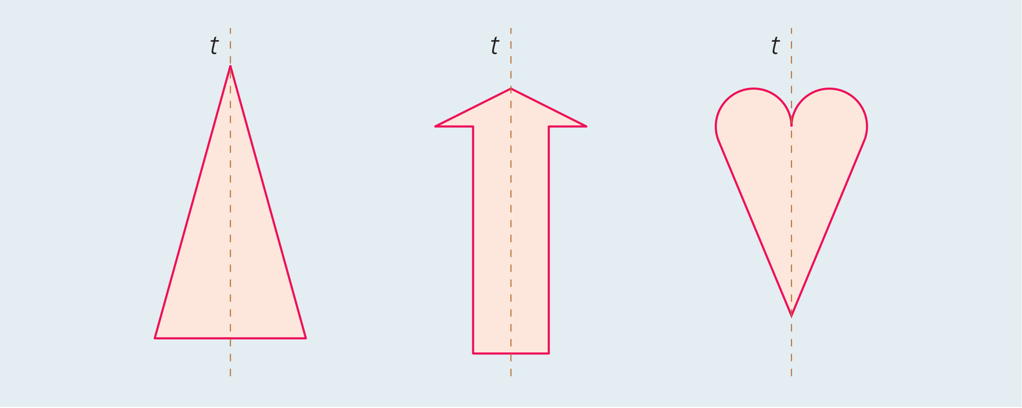
a) Az f transzformáció után kapjuk: $A_1(1; -4)$, $B_1(-2; -3)$, $C_1(4; 0)$.
b) A g transzformáció után kapjuk: $A_2(1; 0)$, $B_2(4; 1)$, $C_2(-2; 4)$.
c) A gf transzformáció után kapjuk: $A_3(1; 8)$, $B_3(4; 7)$, $C_3(-2; 4)$.
d) Az fg transzformáció után kapjuk: $A_4(1; 0)$, $B_4(4; -1)$, $C_4(-2; -4)$.

5. E2 Rajzoljunk síkidomokat, amelyekhez található olyan

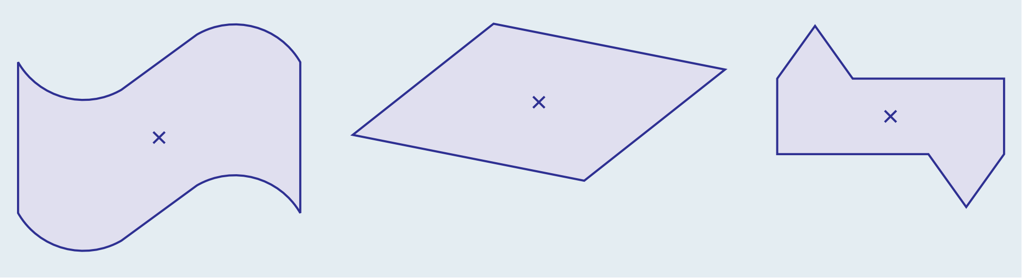
a) tengely; *b)* pont,

amelyre történő tükrözés esetén a síkidom invariáns alakzat!

a) Például:



b) Például:

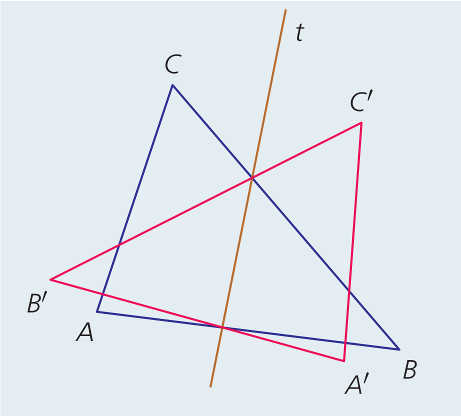


2. Egybevágósági transzformációk a síkon

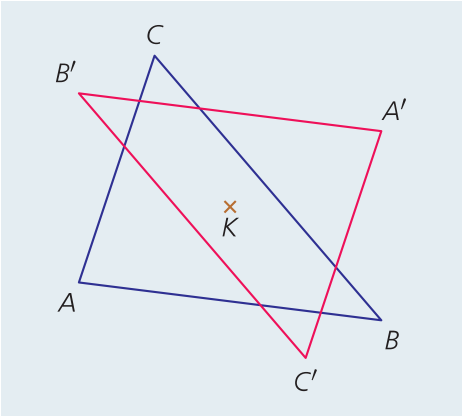
1. K1 Vegyünk fel egy ABC háromszöget, továbbá egy t tengelyt, egy K pontot, egy $\boldsymbol{v}$ vektort és egy α irányított szöget! Szerkesszük meg az ABC háromszögnek

a) a t tengelyre vett tükörképét;
b) a K pontra vett tükörképét;
c) a $\boldsymbol{v}$ vektorral eltolt képét;
d) az α irányított szöggel a K pont körül elforgatott képét!

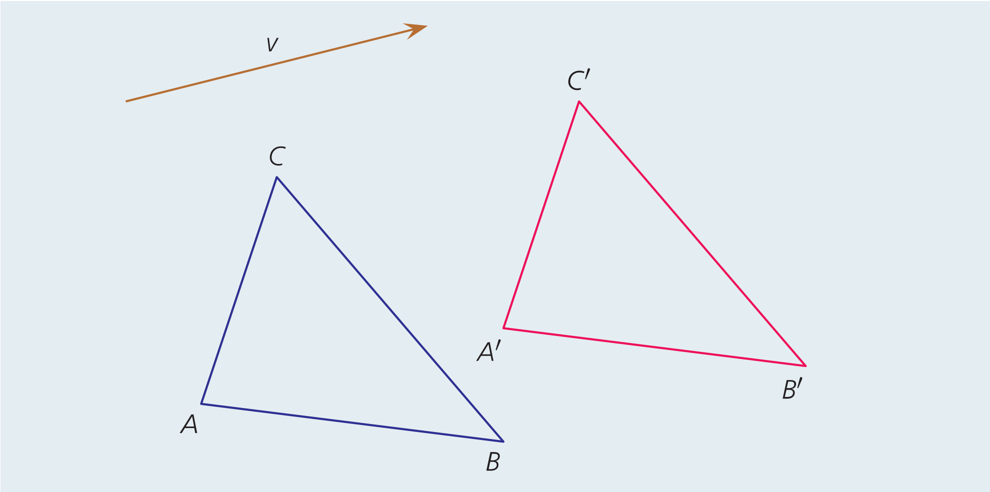
a)



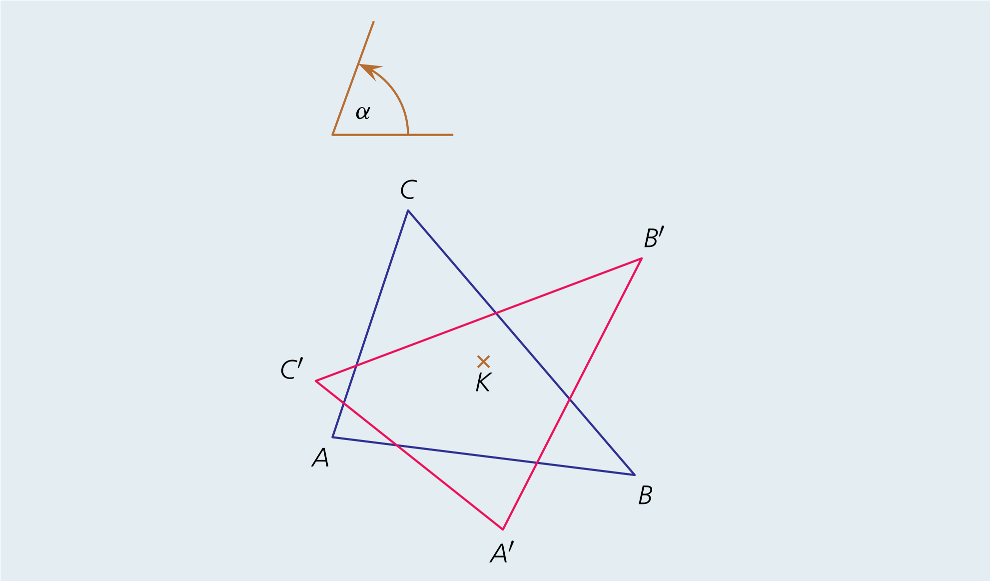
b)



c)

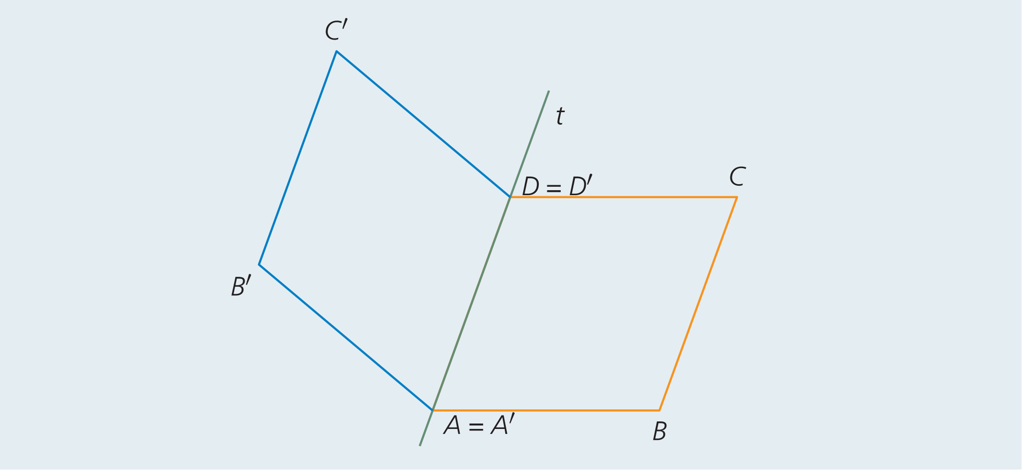


d)

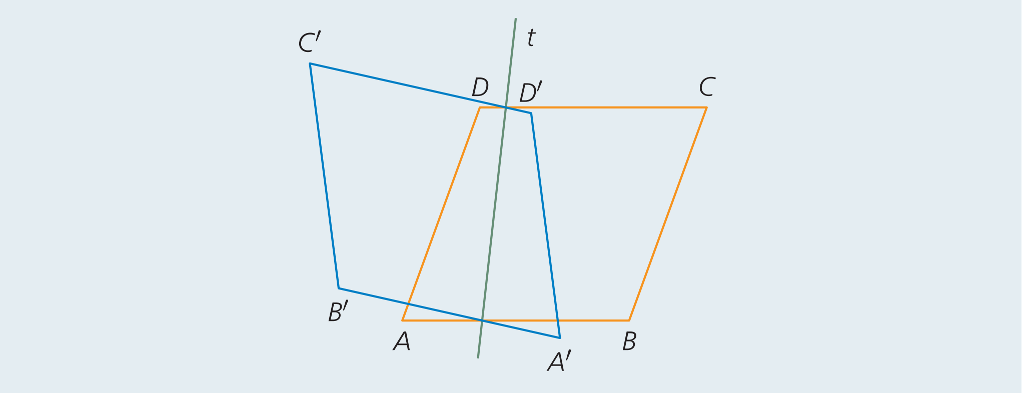


2. K1 Adott egy rombusz. Tükrözzük
a) az egyik oldalegyenesére;
b) egy olyan egyenesre, amely a rombuszt kettévágja, de egyetlen csúcsa sem illeszkedik rá!

a) Ábra a szöveg alapján:



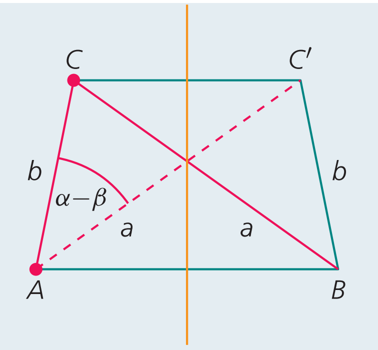
b) Ábra a szöveg alapján:



3. K2 Adott két egyenlő sugarú kör. Szerkesszünk olyan
a) egyenest;
b) pontot,
amelyre az egyik kört tükrözve megkapjuk a másikat!

a) A két kör középpontját összekötő szakasz felezőmerőleges egyenese lesz a tengely.
b) A két kör középpontját összekötő szakasz felezőpontja lesz a középpont.

4. K2 Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és az ezekkel szemközti szögek különbsége!



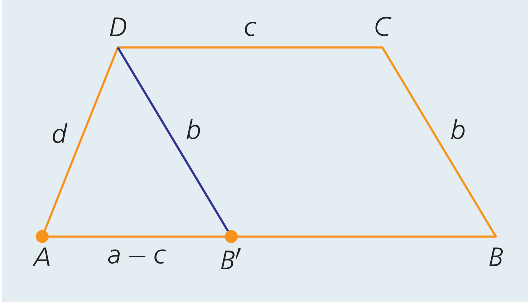
Adatok: a, b, $\alpha - \beta$.

Vázlatrajzot készítünk. Tükrözzük a háromszöget az *AB* oldal felezőmerőlegesére, *C* pont képe legyen *C*′.

A *CAC*′ háromszög megszerkeszthető, mert adott két oldala és a közbezárt szögük. A *CC*′ szakasz felezőmerőleges egyenesére tükrözzük az *A* csúcsot, ekkor kapjuk a hiányzó *B* csúcsot.

5. K2 Szerkesszünk trapézt, ha adott a négy oldala!

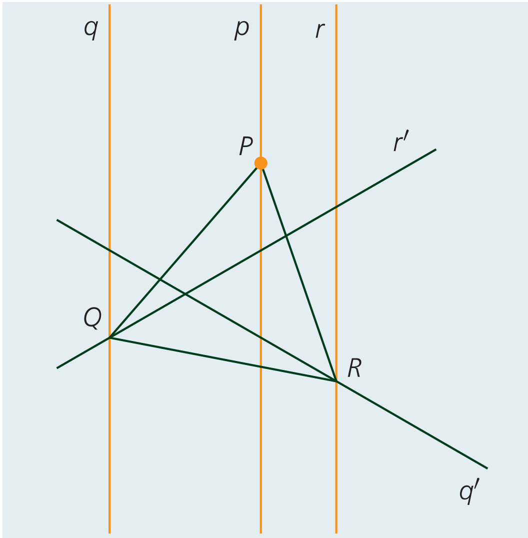
Adatok: a, b, c, d.



Az ábra jelöléseit használjuk. Húzzunk párhuzamost D ponton át BC-vel! Ennek metszéspontja AB-vel legyen B'.
Az $AB'D$ háromszög megszerkeszthető, mert ismert mindhárom oldalának hossza.
Az AB' egyenes B'-n túli meghosszabbítását elmetsszük a B' középpontú c sugarú körrel, így kapjuk a B pontot. A D középpontú c sugarú, és a B középpontú b sugarú kör egyik metszéspontja lesz a C' (a másik metszéspont a B').

A megoldhatóság feltétele: Ha teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek az $a - c$, b, d szakaszokra, akkor van megoldás, és az egyértelmű.

6. E1 Adott három párhuzamos egyenes és az egyiken egy P pont. Szerkesszük meg a PQR szabályos háromszöget olyan módon, hogy a Q és az R pontok illeszkedjenek a másik két egyenesre!

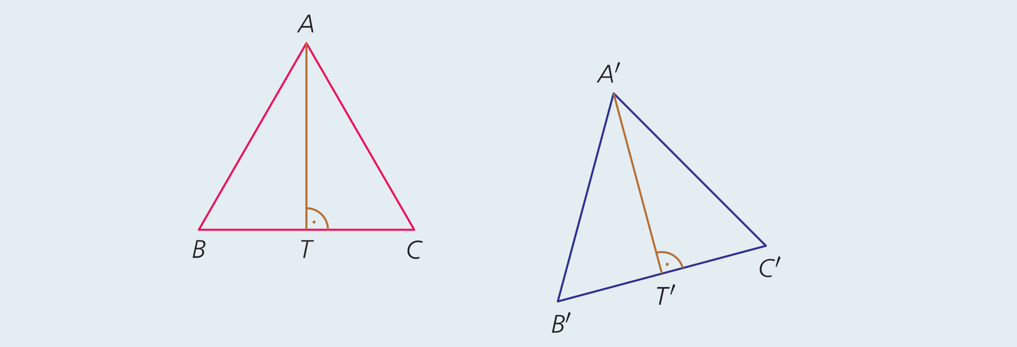


Az ábra jelöléseit használjuk.
A P körüli 60°-os forgatás a Q pontot az R-be transzformálná, de nem ismerjük a Q pontot. Tudjuk, hogy Q illeszkedik q-ra és R illeszkedik r-re, ezért q egyenes P pont körüli 60°-os q' elforgatottja és r egyenes metszéspontja adja az R pontot. R visszaforgatásával kapjuk a Q pontot.

3. Alakzatok egybevágósága

1. K2 Igazoljuk, hogy ha két szabályos háromszögnek egyenlő a magassága, akkor a két háromszög egybevágó!

Az ábra jelöléseit használva:



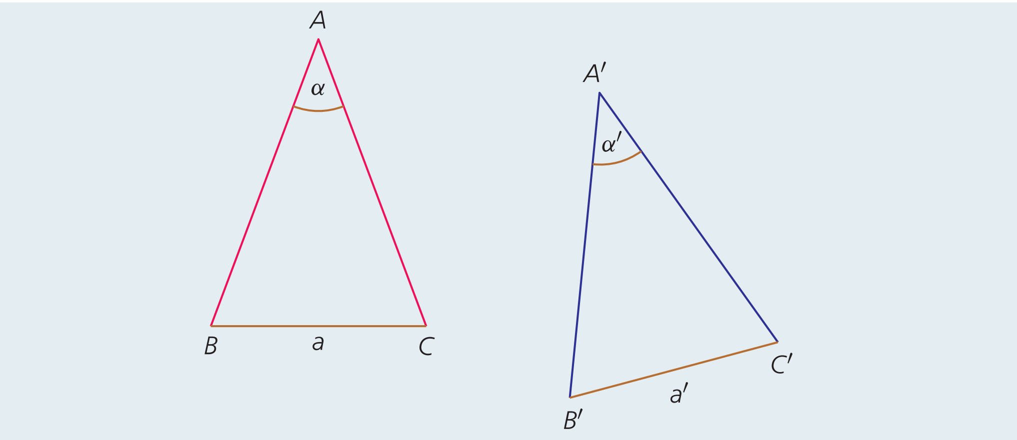
Tudjuk, hogy $AT = A'T'$. Mivel $BTA\sphericalangle = B'T'A'\sphericalangle$, $BAT\sphericalangle = B'A'T'\sphericalangle$, ezért $BTA\Delta \cong B'T'A'\Delta$ (egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő). Ezért $AB = A'B'$. Ebből már következik, hogy $ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$, hiszen egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő. (60°-os, hiszen szabályos háromszögekről volt szó.)

2. K2 Igazoljuk, hogy ha két rombusznak páronként egyenlők az átlói, akkor a két rombusz egybevágó!

A két-két átló négy-négy egybevágó derékszögű háromszögre vágja a rombuszt. A rombusz átlói felezve metszik egymást, ezért egy ilyen háromszög befogói a fél átlókkal azonos hosszúságúak. Vagyis egybevágó derékszögű háromszögekről van szó.
A két rombusz valóban egybevágó.

3. K2 Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha megegyeznek alapjukban és az alappal szemközti szögükben!

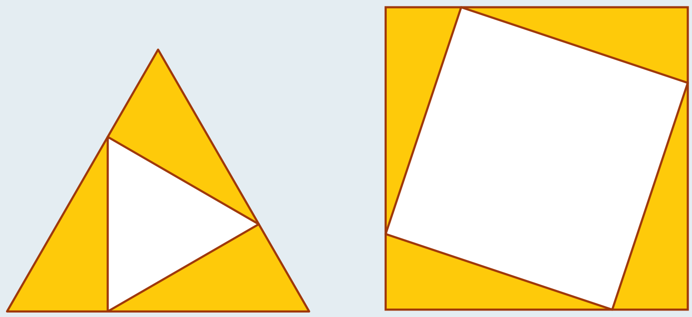
Az ábra jelöléseit használjuk:



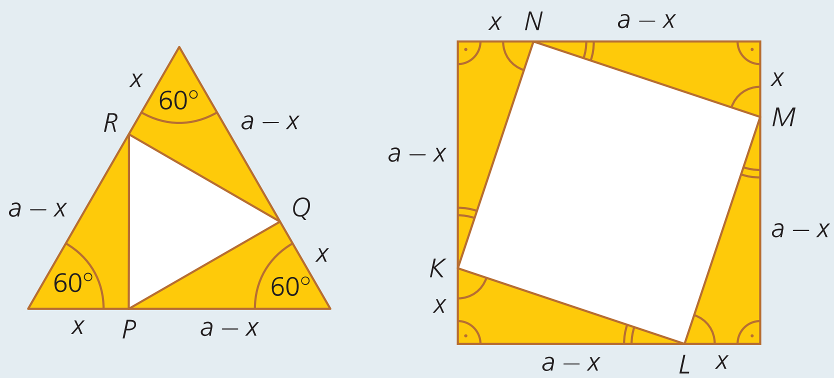
Mivel egyenlő szárúak a háromszögek, ezért ki tudjuk fejezni az alapon fekvő szögeket. $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \frac{180° - \alpha}{2}$, $A'B'C'\sphericalangle = A'C'B'\sphericalangle = \frac{180° - \alpha}{2}$. Tudjuk, hogy $\alpha = \alpha'$, ezért $\frac{180° - \alpha}{2} = \frac{180° - \alpha'}{2}$.

Vagyis $ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$, hiszen egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő.

4. K2 Egy szabályos háromszög és egy négyzet oldalait az ábrán látható módon, ugyanolyan arányban szétosztottuk. Igazoljuk, hogy az osztópontok az első ábrán szabályos háromszöget, a második ábrán négyzetet határoznak meg!

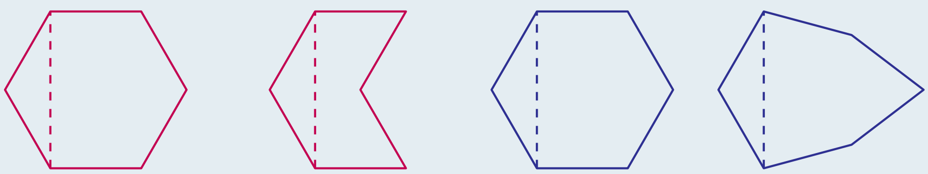


Az ábrán feltüntetett adatok felhasználásával belátható, hogy mindkét ábrán a színes háromszögek egybevágók.
Az egybevágóságból következik, hogy $PQ = QR = RP$, vagyis PQR háromszög valóban szabályos háromszög.
Az egybevágóságból a második ábrán is következik, hogy $KL = LM = MN = NK$, ezért $KLMN$ biztosan rombusz. A rombusz bármelyik csúcsánál megmutatható, hogy derékszög van. Egy egyíves és egy kétíves szög összege 90°, így például: $LKN\sphericalangle = 90°$. Ezek alapján $KLMN$ négyzet.



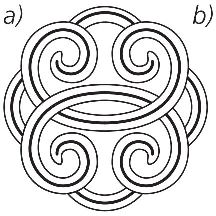
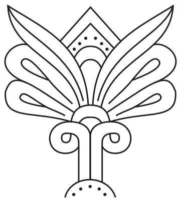
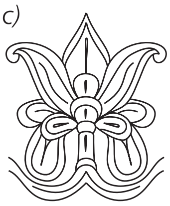
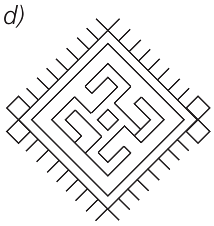
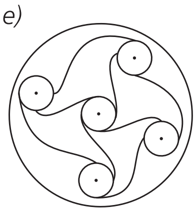
5. K2 Két hatszög mind a 12 oldala egyenlő hosszú. Egybevágó-e a két hatszög, ha
a) mindkettőnek van 120°-os szöge;
b) egy-egy átlójukról tudjuk, hogy egyenlő hosszú?

a) Nem biztos.
b) Nem biztos.
Az ábrák mindkét részre ellenpéldát mutatnak.



4. Szimmetria

1. K1 Milyen szimmetriát, szimmetriákat figyelhetünk meg az ábrákon?

a)

b)

c)

d)

e)


a) középpontos szimmetria;
b) tengelyes szimmetria;
c) tengelyes szimmetria;
d) 90°-os forgásszimmetria; középpontos szimmetria;
e) középpontos szimmetria; forgási szimmetria.

2. K1 Csoportosítsuk a
a) háromszögeket; *b)* négyszögeket
a szimmetriatengelyeik száma szerint!

a) Három szimmetriatengely: szabályos háromszögek;
egy szimmetriatengely: egyenlő szárú háromszögek;
nincs szimmetriatengely: a további háromszögek.
b) Négy szimmetriatengely: négyzet;
két szimmetriatengely: téglalap, rombusz;
egy szimmetriatengely: deltoid, húrtrapéz;
nincs szimmetriatengely: a további négyszögek.

3. K1 Milyen szimmetriákkal rendelkezik a négyzet?

Tengelyes szimmetria, 90°-os forgásszimmetria, középpontos szimmetria.

4. K2 Milyen szimmetriákkal rendelkezik egy szabályos
a) hatszög; *b)* hétszög?

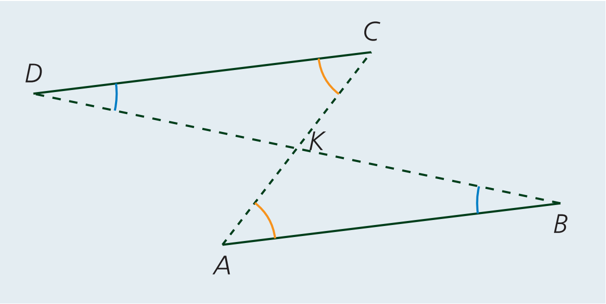
a) Tengelyes szimmetria, 60°-os forgásszimmetria, középpontos szimmetria.
b) Tengelyes szimmetria, $\frac{360^\circ}{7}$-os forgásszimmetria.

5. K1 A felsorolt síkidomokról döntsük el, hogy tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikusak-e, forgásszimmetrikusak-e!
Szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, paralelogramma, rombusz, szabályos tízszög, kör.

Szabályos háromszög: tengelyesen szimmetrikus, forgásszimmetrikus;
egyenlő szárú háromszög: tengelyesen szimmetrikus;
derékszögű háromszög: egyik sem (ha nem egyenlő szárú);
paralelogramma: középpontosan szimmetrikus;
rombusz: tengelyesen és középpontosan szimmetrikus;
szabályos tízszög: tengelyesen és középpontosan szimmetrikus, forgásszimmetrikus;
kör: tengelyesen és középpontosan szimmetrikus, forgásszimmetrikus.

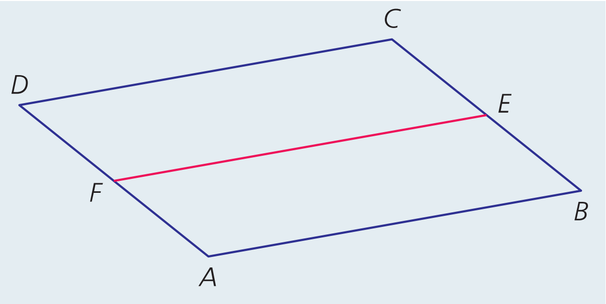
6. E1 Bizonyítsuk be, hogy az a négyszög paralelogramma, amelynek két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú!

Az ábrán $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Legyen K a négyszög átlóinak metszéspontja.
$ABK\Delta \cong CDK\Delta$, mert $AB = CD$, a B-nél és a D-nél lévő szögek egyenlők (váltószögek), az A-nál és a C-nél lévő szögek is egyenlők (váltószögek).
Az egybevágóság miatt: $AK = KC$, $BK = KD$. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög átlói felezve metszik egymást, vagyis paralelogramma.



7. E1 Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontján áthaladó egyenes a paralelogrammát két paralelogrammára vágja!

Az ábrán látható $ABEF$ négyszögről belátjuk, hogy paralelogramma.
Mivel $AD \parallel BC$, ezért $AF \parallel BE$.
Mivel $AD = BC$, ezért a feleekkora szakaszok is egyenlők: $AF = BE$.
Vagyis $ABEF$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő. Ugyanígy bizonyítanánk, hogy $DFEC$ négyszög is paralelogramma.



5. További nevezetes pontok és vonalak a háromszögben

1. K1 Egy háromszög oldalai
a) 15, 17, 28; *b)* $4a$, $8b + 2$, $6c - 1$.
Mekkorák a háromszög középvonalai?

a) 7,5, 8,5, 14; *b)* $2a$, $4b + 1$, $3c - 0{,}5$.

2. K1 Egy háromszöget a három középvonala négy háromszögre vág. Ezek közül az egyiknek 23 cm a kerülete. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

46 cm a nagy háromszög kerülete, mert minden oldala kétszer akkora, mint a kis háromszög megfelelő oldala.

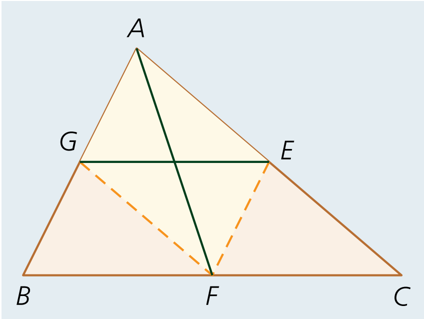
3. K2 Az ABC háromszög A-ból induló súlyvonala F pontban metszi a BC oldalt. A háromszög súlypontja S. Az ABF háromszög területe 41 cm^2. Mekkora
a) az ABC; *b)* az SFC; *c)* az ABS
háromszög területe?

a) Az ABF háromszög területének kétszerese, vagyis 82 cm^2.

b) Az ABF háromszög területének harmada, vagyis $13{,}\dot{6}$ cm^2. (ACF és ABF háromszögek területe egyenlő, továbbá $SF = \frac{1}{3} \cdot AF$, és az ezekhez tartozó magasság pedig egyenlő.)

c) Az ABF háromszög területének kétharmada, vagyis $27{,}\dot{3}$ cm^2. (Az előzőekben leírtak miatt.)

4. K2 Egy háromszögbe berajzoltunk egy középvonalat és egy olyan súlyvonalat, amely metszi ezt a középvonalat. A két szakasz négy végpontja milyen négyszöget határoz meg?

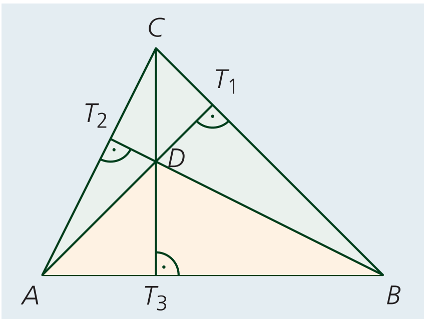


Az *ABC* háromszögben *AF* súlyvonal, *EG* pedig egy középvonal.
Mivel $EF = AG$ és $EF \parallel AG$ (hiszen *EF* is középvonal a háromszögben), ezért *EFGA* paralelogramma.

5. E1 Megszerkesztett egy háromszög köré írt körének a középpontja. Mutassuk meg, hogy ez a középpont az oldalfelező pontok által meghatározott háromszögben magasságpont!

Az oldalfelező pontokat összekötő szakaszok középvonalak. A középvonal párhuzamos a szemközti oldallal, ezért a felezőponton átmenő merőleges egyenes a középvonalra is merőleges. Az eredeti háromszög oldalfelező merőlegesei tehát az oldalfelező pontok által meghatározott háromszögben magasságvonalak. Ez pontosan a bizonyítandó állítást jelenti.

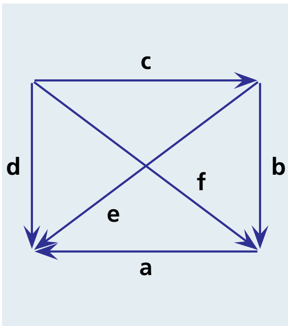
6. K2 Az *ABC* háromszögben *D* a magasságpont. Mutassuk meg, hogy az *ABD* háromszögben *C* a magasságpont!



Nézzük az ábrát!
Az *ABD* háromszögben AT_2, BT_1, DT_3 magasság, ezek metszéspontja éppen *C*. Vagyis valóban *C* a magasságpont az *ABD* háromszögben.

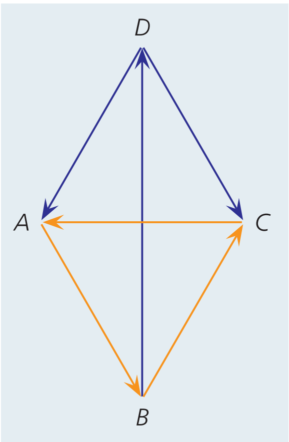
6. Vektorok

1. K1 Az ábrán jelölt vektorok közül válasszuk ki
a) az egyenlőket;
b) az ellentetteket;
c) azokat, amelyek nem egyenlők és nem ellentettek, de egyenlő az abszolút értékük!



a) egyenlők: **d** és **b**;
b) ellentettek: **a** és **c**;
c) nem egyenlők és nem ellentettek, de egyenlő az abszolút értékük: **e** és **f**.

2. K1 Két szabályos háromszög egymáshoz illesztésével rombuszt rajzolunk. Rajzoljuk be a rombusz mindkét átlóját. Az oldalakat és az átlókat irányítsuk úgy, hogy hat különböző vektort kapjunk. Válasszuk ki ezek közül azokat, amelyek összege **0**!

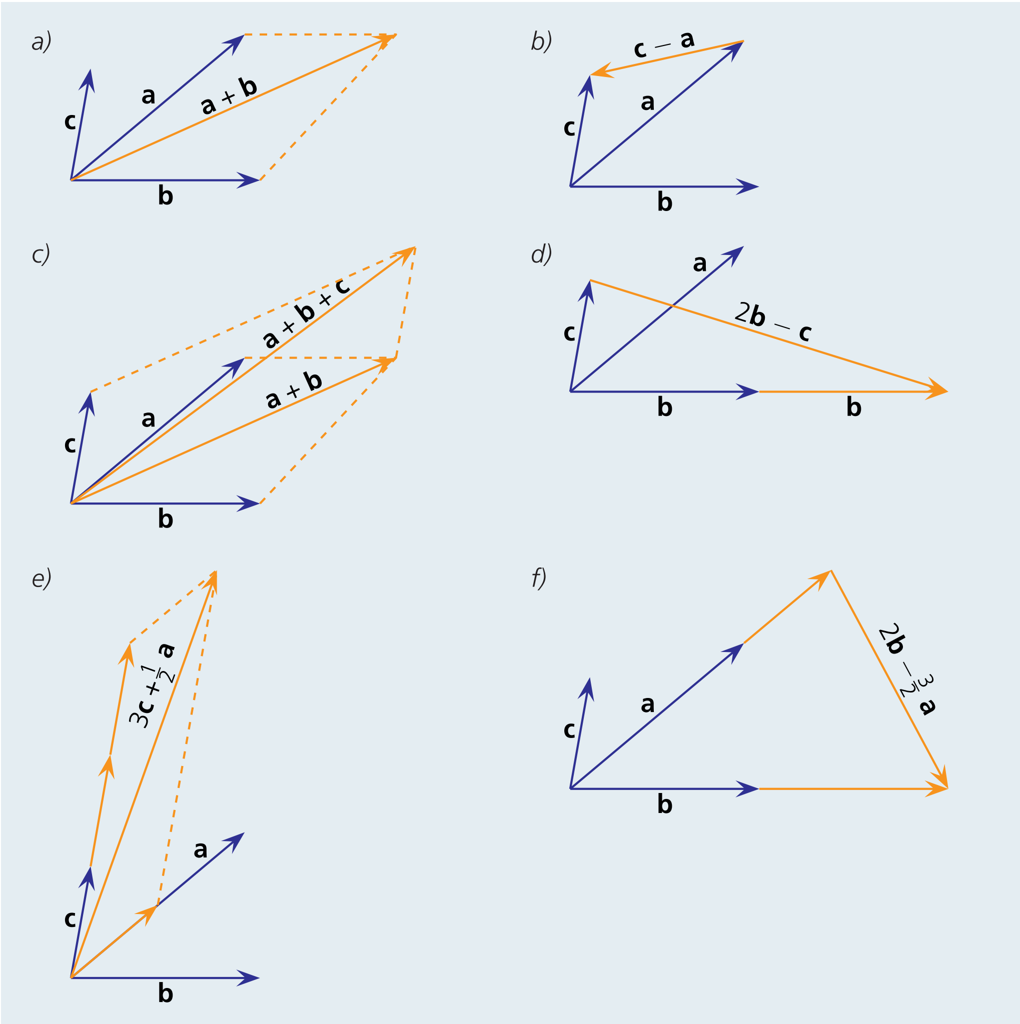


Például: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$.

3. K2 Egy kocka egyik csúcsából felvesszük a három különböző élvektort. Adjuk meg ezekkel a vektorokkal a kocka ezen csúcsából induló lapátló és testátló vektorokat!

Az egy csúcsból induló élvektorok legyenek: **a**, **b**, **c**.
Ekkor a lapátló vektorok: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, a testátló vektor: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

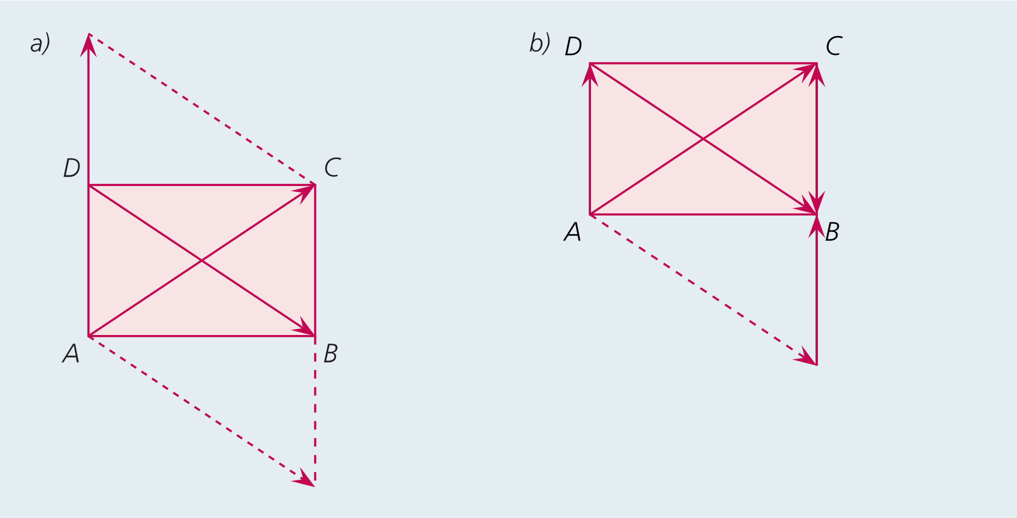
4. K2 Adott **a**, **b** és **c** vektor (semelyik kettő nem egyenlő egymással). Szerkesszük meg az
a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; *b)* $\mathbf{c}-\mathbf{a}$; *c)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$; *d)* $2\mathbf{b}-\mathbf{c}$;
e) $3\mathbf{c}+\frac{1}{2}\mathbf{a}$; *f)* $2\mathbf{b}-\frac{3}{2}\mathbf{a}$
vektorokat!



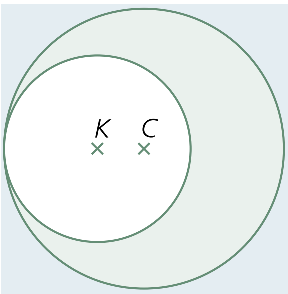
5. K2 Legyen *ABCD* egy tetszőleges téglalap. Mutassuk meg, hogy

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$;

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$!



7. Ponthalmazok



1. K1 Adott a síkon egy *K* és egy *C* pont, távolságuk 1 cm. Színezzük be a sík azon pontjait, amelyek a *K*-tól 2 cm-nél nem közelebb és a *C*-től 3 cm-nél nem távolabb találhatók!

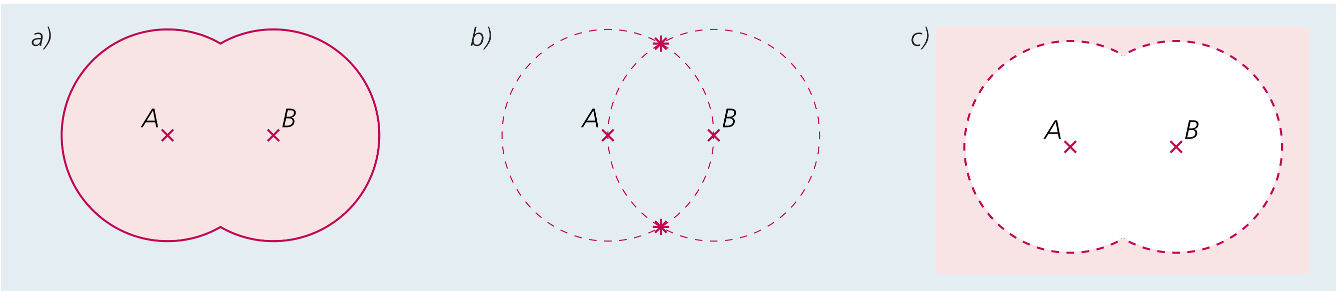
Az ábra színezett része mutatja a megoldást.

2. K1 Adott a síkon egy *A* és egy *B* pont, távolságuk 2 cm. Színezzük be a sík azon pontjait, amelyeknek

a) vagy az *A* vagy a *B* (vagy mindkettő) ponttól mért távolsága nem nagyobb, mint 2 cm;

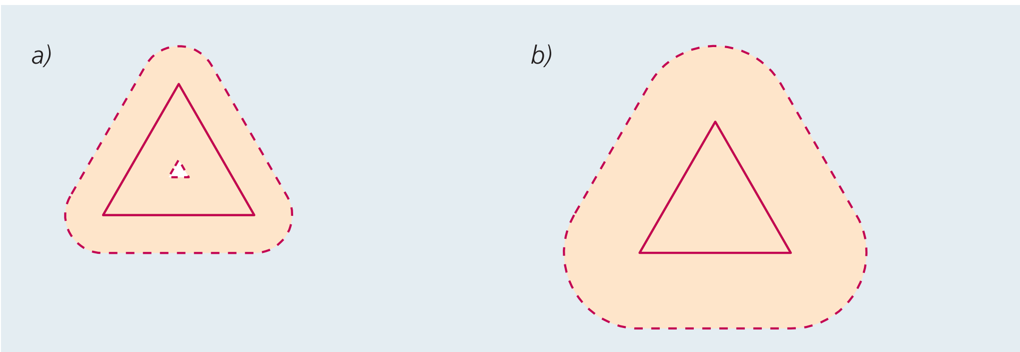
b) az *A* és a *B* ponttól mért távolsága is 2 cm;

c) az *A* és a *B* ponttól mért távolsága is nagyobb, mint 2 cm!

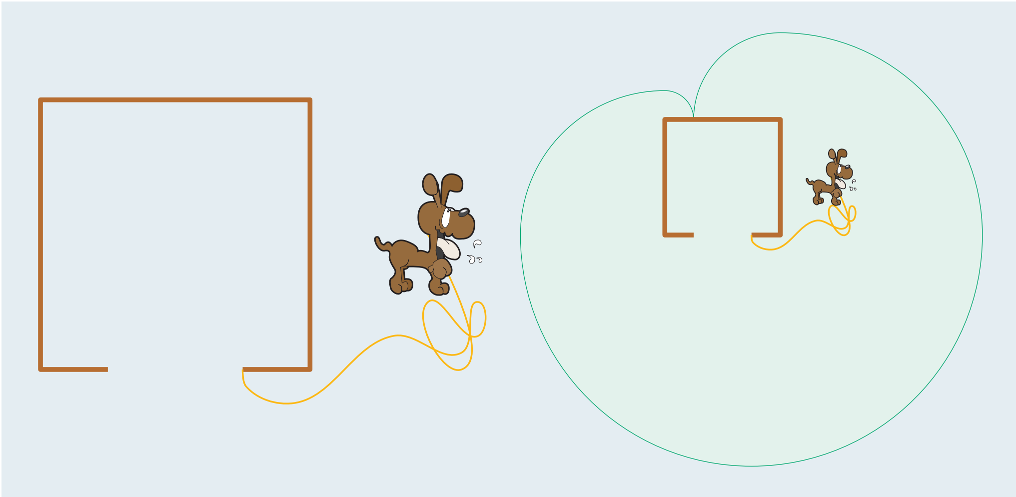


3. K1 Adott a síkon egy 2 cm sugarú körvonal. Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkon, melyeknek távolsága a körvonaltól kisebb, mint
a) 1 cm; *b)* 2 cm; *c)* 2,5 cm!

4. K2 Adott a síkon egy 2 cm oldalú szabályos háromszög. Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkon, amelyeknek távolsága a háromszög határvonalától kisebb, mint
a) 0,5 cm; *b)* 1 cm!



5. E1 Az ábrán látható vázlat felülről nézve egy négyzet alakú kutyaólat mutat. A négyzet oldala 80 cm. A bejárat egyik széléhez egy 160 cm-es pórázzal kikötöttek egy kutyát. A bejárat 40 cm széles, és szimmetrikusan helyezkedik el az ól széleihez képest. Szemléltessük rajzzal a kutya által bejárható területet!



6. K2 A koordinátasíkon határozzuk meg azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre

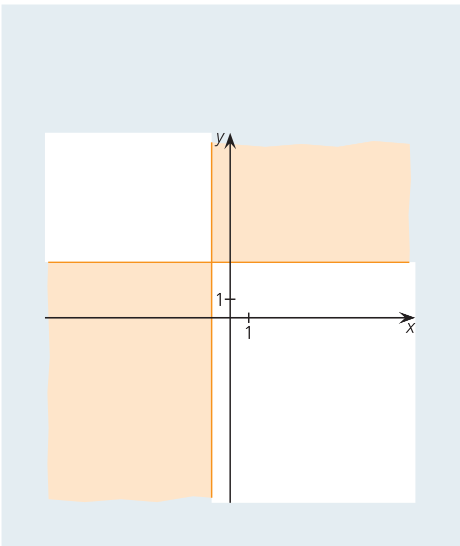
a) $(x+1)(y-3) > 0$;

b) $x^2 = y^2$;

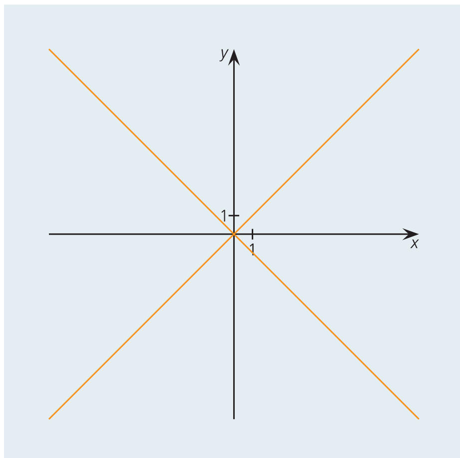
c) $|x| + |y| = 4$;

d) $|x| + |y| \leq 4$!

a)



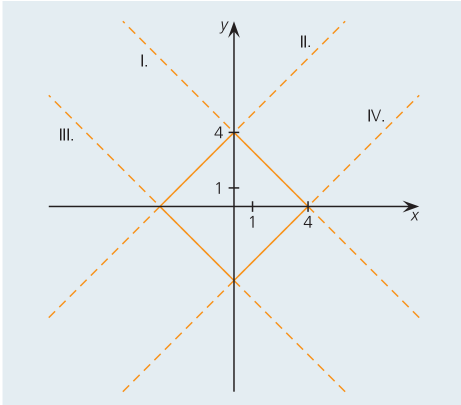
b) Írható így is: $(x-y)(x+y) = 0$. Vagyis: $x = y$ vagy $x = -y$.



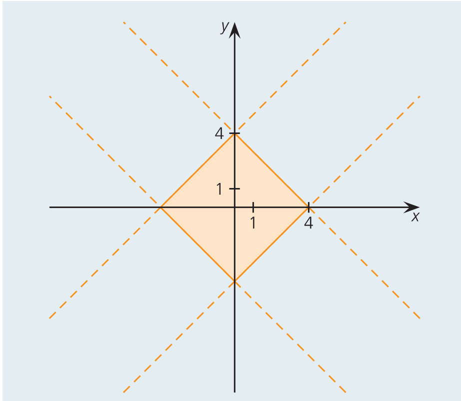
c) Négy esetet kell megvizsgálnunk.

I. Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor $x + y = 4$, azaz $y = -x + 4$.
II. Ha $x < 0$ és $y \geq 0$, akkor $-x + y = 4$, azaz $y = x + 4$.
III. Ha $x < 0$ és $y < 0$, akkor $-x - y = 4$, azaz $y = -x - 4$.
IV. Ha $x \geq 0$ és $y < 0$, akkor $x - y = 4$, azaz $y = x - 4$.

Az egyes esetekhez kapcsolódó ponthalmazt szaggatott vonallal rajzoltuk, a feltételnek megfelelő részét színeztük.



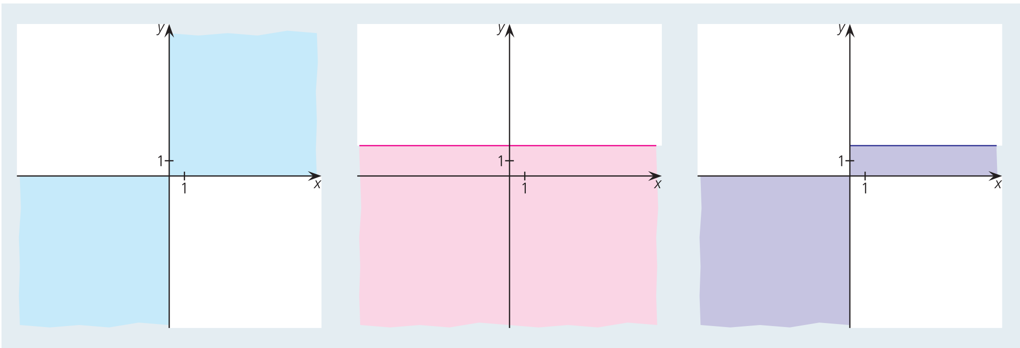
d) Az előzőeket felhasználva kapjuk:



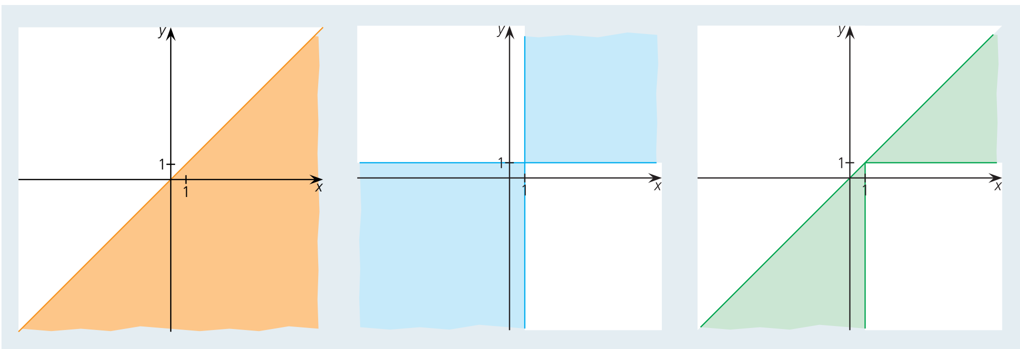
7. E1 A koordinátasíkon határozzuk meg azoknak a $P(x;\, y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira fennállnak a következő egyenlőtlenség-rendszerek!

a) $\left.\begin{matrix} xy > 0 \\ y \le 2 \end{matrix}\right\}$; *b)* $\left.\begin{matrix} x \ge y \\ (x-1)(y-1) \ge 0 \end{matrix}\right\}$.

a) A két feltételnek eleget tevő ponthalmazokat először külön-külön ábrázoljuk, majd a harmadik ábrán látható a megoldás.



b) A két feltételnek eleget tevő ponthalmazokat először külön-külön ábrázoljuk, majd a harmadik ábrán látható a megoldás.



8. Szög, körív, körcikk

1. K1 Számítsuk ki az $r = 15$ cm sugarú körben az alább megadott középponti szögekhez tartozó körív hosszát és körcikk területét!
a) 60°; *b)* 150°; *c)* 210°; *d)* 270°.

A 15 cm sugarú kör kerülete $2 \cdot 15 \cdot \pi$. Az ismeretlen körív hosszát jelöljük i-vel.

a) $\frac{i}{30\pi} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$, amiből $i = 5\pi \approx 15{,}7$ (cm).

b) $\frac{i}{30\pi} = \frac{150^\circ}{360^\circ}$, amiből $i = 12{,}5\pi \approx 39{,}3$ (cm).

c) $\frac{i}{30\pi} = \frac{210^\circ}{360^\circ}$, amiből $i = 17{,}5\pi \approx 55{,}0$ (cm).

d) $\frac{i}{30\pi} = \frac{270^\circ}{360^\circ}$, amiből $i = 22{,}5\pi \approx 70{,}7$ (cm).

2. K2 Számítsuk ki az $r = 8$ cm sugarú körben az alább megadott középponti szögekhez tartozó körív hosszát és körcikk területét!
a) 47°; *b)* 162°; *c)* 62° 30′; *d)* 27° 48′.

A 8 cm sugarú kör kerülete 16π, területe 64π. Az ismeretlen körív hosszát jelöljük i-vel, a körcikk területét t-vel.

a) $\frac{i}{16\pi} = \frac{47^\circ}{360^\circ}$, amiből $i \approx 6{,}6$ cm, $\frac{t}{64\pi} = \frac{47^\circ}{360^\circ}$, amiből $t \approx 26{,}2$ (cm^2).

b) $\frac{i}{16\pi} = \frac{162^\circ}{360^\circ}$, amiből $i \approx 22{,}6$ cm, $\frac{t}{64\pi} = \frac{162^\circ}{360^\circ}$, amiből $t \approx 90{,}5$ (cm^2).

c) $\frac{i}{16\pi} = \frac{62{,}5^\circ}{360^\circ}$, amiből $i \approx 8{,}7$ cm, $\frac{t}{64\pi} = \frac{62{,}5^\circ}{360^\circ}$, amiből $t \approx 34{,}9$ (cm^2).

d) $\frac{i}{16\pi} = \frac{27{,}8^\circ}{360^\circ}$, amiből $i \approx 3{,}9$ cm, $\frac{t}{64\pi} = \frac{27{,}8^\circ}{360^\circ}$, amiből $t \approx 15{,}5$ (cm^2).

3. K2 Írjuk fel ívmértékben: 22°, 46°, 100°, 110°, 200°, 43° 12′, 53° 32′, 100° 42′!

22° ≈ 0,384; 46° ≈ 0,803; 100° ≈ 1,745; 110° ≈ 1,920; 200° ≈ 3,491;
43° 12′ = 43,2° ≈ 0,754; 53° 32′ = $53{,}5\dot{3}$ ≈ 0,934; 100° 42′ = 100,7° ≈ 1,758.

4. K1 Hány fokosak azok a szögek, melyek ívmértéke: $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$?

$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$; $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$; $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$; $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$; $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$; $\frac{5\pi}{2} = 450^\circ$.

5. K1 Hány fokosak azok a szögek, melyek ívmértéke: 2, 3, 4, 2,5, 3,1, 5,3, 11, 314?

2 ≈ 114,59°; 3 ≈ 171,89°; 4 ≈ 229,18°; 2,5 ≈ 143,24°; 3,1 ≈ 177,62°;
53 ≈ 303,67°; 11 ≈ 630,25°; 314 ≈ 17 990,87°.

VII. Kombinatorika

1. Sorrendek

1. K1 Hányféle sorrendben tehetnek ki egy árubemutatón öt különböző terméket?

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féleképpen.

2. K1 Egy piacon az árus a zöldségesládákat 6-féle sorrendben helyezheti ki. Hány ládát tett ki?

Hármat, mert $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

3. K1 Öt gyerek barlangászni indul. Az egyik keskeny járaton csak egyesével férnek keresztül. Azt szeretnék, ha a legtapasztalatlanabb gyerek kerülne középre. Hányféle sorrendben mehetnek át a keskeny járaton?

A középső gyerek helye nem változtatható, a négy másik gyerek $4! = 24$-féle sorrendben haladhat.

4. K1 Az osztályban a gyerekek felsorolják, hogy nyolc tantárgy közül sorrendben melyik négy a kedvencük. Hányféle különböző sorrendet állíthatnak fel a gyerekek?

Az első helyre 8 tantárgyat sorolhatnak. A másodikra (tetszőlegesen kiválasztott első tantárgy után) 7-et. Ez $8 \cdot 7$-féle lehetőség. A harmadikra (a tetszőlegesen kiválasztott első két tantárgy után) 6-ot, ez $8 \cdot 7 \cdot 6$-féle lehetőség. Végül a negyedikre (a tetszőlegesen kiválasztott első három tantárgy után) 5-öt sorolhatnak. Így az összes lehetséges sorrendek száma $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

5. K2 *a)* Hányféle különböző sorrendben rakható le egymás mellé egy-egy darab $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$ számkártya?
b) Az a) feladatban megadott számok közül hány számsor kezdődik 0-val?
c) Hány különböző ötjegyű szám képezhető az adott számkártyákból?
d) Hány különböző, 4-essel kezdődő ötjegyű szám képezhető az adott számkártyákból?

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$;
b) $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$;
c) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$, vagy $120 - 24 = 96$ szám képezhető;
d) $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

2. Leszámolások

1. K1 Hányféleképpen olvasható ki a KATEDRA szó az alábbi ábrákon, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

a)

K	A	T	E
A	T	E	D
T	E	D	R
E	D	R	A

b)

K	A	T
A	T	E
T	E	D
E	D	R
D	R	A

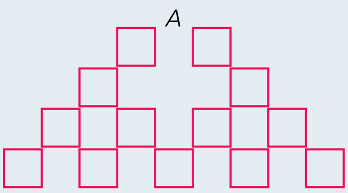
a) $\binom{6}{3} = 20$; *b)* $\binom{6}{2} = 15$.

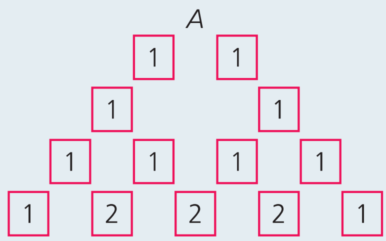
2. K1 Hányféleképpen olvasható ki a LALAK az alábbi ábrán, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

L	A	L	A
A	L	A	K
L	A		
A	K		

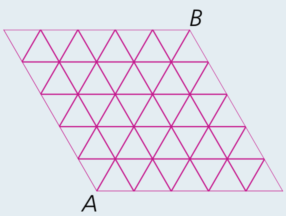
Leszámláljuk. A két K betűhöz 4-4-féleképpen juthatunk el, összesen 8-féle kiolvasás lehetséges.

3. K1 A következő ábrán az *A* pontból indulunk, és minden lépésben lefelé megyünk egyet jobbra vagy balra.
Írjuk be minden csúcsponthoz, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni!



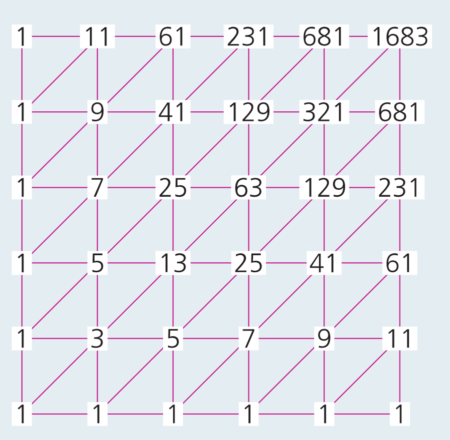


4. K2 Induljunk el a háromszögrácson az *A* pontból a *B* pontba!



A három megengedett haladási irány:  Hányféle útvonal van?

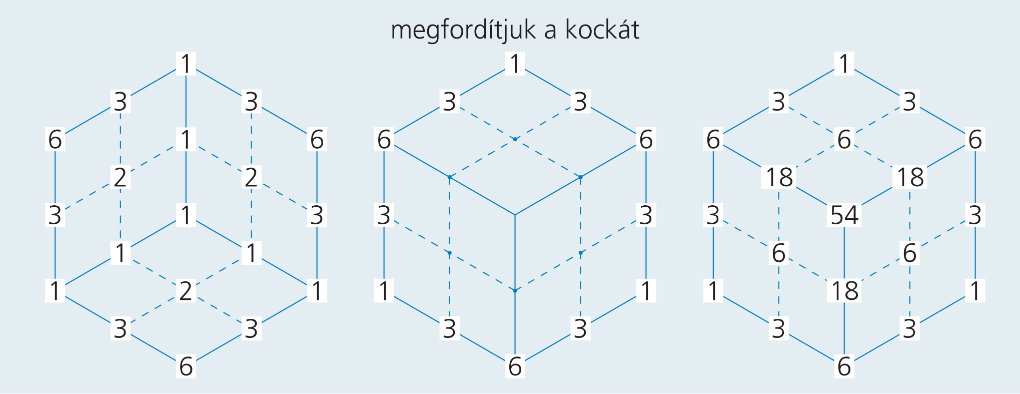
A rácsot „felegyenesíthetjük”, mert a metszéspontok akkor is ugyanúgy helyezkednek el. Egy-egy csúcspontba egy, kettő vagy három másik csúcspontból érkezhetünk. Az egyes csúcspontokba beírva, hogy oda hányféleképpen juthatunk el az *A* ponttól, összesen 1683-féleképpen juthatunk el *B*-be.



5. E1 *a)* Egy 2 × 2 × 2 egységoldalú kockarácson egységnyi lépésekkel lépegetve el akarunk jutni valamelyik testátló egyik végpontjából a másik végpontba. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha soha nem lépünk visszafelé?
b) Egy 2 × 2 × 2 egységoldalú kocka felszínén az oldalakkal párhuzamos, egységnyi lépésekkel lépegetve el akarunk jutni valamelyik testátló egyik végpontjából a másik végpontba. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha soha nem lépünk visszafelé?

a) 6-ot lépünk, 2-2 lépést 3 irányba. Az egyik irányú lépést $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk ki, egy másik irányút $\binom{4}{2}$-féleképpen. A maradék lépést a harmadik irányba tesszük meg. Az összes lehetőség száma: $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 1 = 90$.

b) Többféleképpen is gondolkodhatunk.
1. A kockarácson történő lépegetéssel kapott esetekből kihagyjuk azokat az eseteket, amelyeknél (éppen a harmadik lépésre) belépünk a kocka belsejébe. Vagyis azokat az eseteket, amelyekben áthaladunk a kocka középpontján. A kocka középpontjába 6-féleképpen tudunk eljutni, onnan a végpontba (mind a 6 esethez) 6-féleképpen, vagyis összesen 36 esetben haladunk át a középponton. $90 - 36 = 54$ esetben maradunk a kocka felszínén.
2. Rajzoljuk meg a kezdőponthoz csatlakozó három kockalapot ,,alulnézetben", írjuk fel minden csomópontra, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni. Majd rajzoljuk fel a végponthoz csatlakozó 3 lapot ,,felülnézetben", induljunk ki a már felcímkézett csomópontokból, és számoljuk össze a végpontba vezető utakat!



6. E2 Hányféleképpen juthatunk el egy 10 fokból álló lépcső aljáról a tetejére, ha a lépcsőket ötletszerűen egyesével vagy kettesével vesszük?

Számoljuk össze, hogy hányféleképpen léphetünk az egyes lépcsőfokokra! Az elsőre 1, a másodikra (lentről vagy az első fokról) 2, a harmadikra (az első vagy a második fokról) $1 + 2 = 3$, a negyedikre (a második vagy a harmadik fokról) $2 + 3 = 5$, az ötödikre (a harmadik vagy a negyedik fokról) $3 + 5 = 8$, a hatodikra $5 + 8 = 13$, a hetedikre $8 + 13 = 21$, a nyolcadikra $13 + 21 = 34$, a kilencedikre $21 + 34 = 55$, a tizedikre $34 + 55 = 89$ lehetőség van.

VIII. Statisztika

1. Adatok gyűjtése, rendszerezése, jellemzése

1. K1 Kódoljuk a következő adatokat, majd írjuk fel növekvő sorrendben!
a) egy, egy, egy, hét, négy, három, kettő, hat, hat, négy, kettő, öt, három, hat;
b) o, m, k, n, m, a, p, a, h, m, u, m, k, n, n, e, n, a, e, m;
c) négyszög, hatszög, ötszög, hatszög, kör, négyszög, nyolcszög, ötszög, háromszög, hatszög, kör.

a) Például: 1, 1, 1, 7, 4, 3, 2, 6, 6, 4, 2, 5, 3, 6;
rendezve: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7.
b) Például: 1, 2, 3, 4, 2, 5, 6, 5, 7, 2, 8, 2, 3, 4, 4, 9, 4, 5, 9, 2;
rendezve: 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 9.
c) Például: 4, 6, 5, 6, 0, 4, 8, 5, 3, 6, 0;
rendezve: 0, 0, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8.

2. K1 Határozzuk meg a következő adatsorok átlagát, móduszát, mediánját!
a) 1, 1, 3, 5, 3, 8, 0, 2, 5, 4, 5, 6, 6, 1;
b) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2;
c) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10.

a) Átlag: $\frac{50}{14} \approx 3{,}57$; módusz: 1 és 5; medián: a 3 és a 4 számtani közepe: 3,5.
b) Átlag: 1,5; módusz: 1 és 2; medián: az 1 és a 2 számtani közepe: 1,5.
c) Átlag: $\frac{85}{13} \approx 6{,}54$; módusz: 10; medián: 7.

3. E1 Egy adatsor átlaga 4. Van köztük két egyenlő szám. Ha az egyiket kihagyjuk, akkor a maradék számok átlaga 4,2, ha a másikat is kihagyjuk, akkor 4,5 lesz a maradék számok átlaga.
a) Hány szám volt eredetileg?
b) Mi volt a két egyenlő szám?

Ha $n+2$ szám volt és x jelöli az elhagyott számokat, akkor a kapott átlagokból a számok összege: $4(n+2) = 4{,}2\,(n+1) + x = 4{,}5n + 2x$.
Ebből $4n + 8 = 4{,}2n + 4{,}2 + x = 4{,}5n + 2x$. $(4n + x)$-et kivonva mindegyik kifejezésből: $8 - x = 0{,}2n + 4{,}2 = 0{,}5n + x$.
A jobb és a bal oldal összege a középső kifejezés kétszerese: $0{,}5n + 8 = 0{,}4n + 8{,}4$.
Ebből $n = 4$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletekbe $x = 3$ adódik.
Eredetileg $n + 2 = 6$ szám volt, köztük két 3-as, ezeket hagytuk el.

4. K2 Egy tanuló 10 osztályzatának átlaga 3,5.
a) Legfeljebb hány elégtelenje lehet?
b) Legalább hány jelese van?
c) Legfeljebb hány jelese van?
d) Biztos-e, hogy van közepese?

A jegyek összege 35.

a) Akkor lesz a legtöbb egyese, ha minden más osztályzata a lehető legnagyobb. Ha n darab 1-ese van, akkor a maradék $10 - n$ jegy összege – ha mind 5-ös – legfeljebb $5 \cdot (10 - n)$ lehet. Másrészt az összegük éppen $35 - n$. Eszerint a legnagyobb olyan n számot keressük, amelyre még $5 \cdot (10 - n) \geq 35 - n$. Ebből $15 \geq 4n$, vagyis $n \leq 3{,}75$. Mivel n csak egész szám lehet, a legnagyobb ilyen n a 3. $3 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 35$.
b) Nem biztos, hogy van jelese, mert lehet, hogy 5-5 négyese, illetve hármasa van.

c) Ha n darab jelese van, akkor a maradék $10 - n$ jegy összege $35 - 5n$. Akkor lesz a legtöbb jelese, ha a többi osztályzat minél kisebb. A maradék osztályzatok összege legalább $10 - n$. A legnagyobb olyan n számot keressük, amelyre $10 - n \leq 35 - 5n$. Vagyis amelyre $4n \leq 25$, $n \leq 6{,}25$. $n = 6$ a legnagyobb ilyen egész szám. $6 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 35$.

d) Az előzőekben láttuk, hogy egyáltalán nem kell, hogy közepese legyen.

5. K2 Készítsünk olyan öt adatból álló adatsort, amelynek mediánja és módusza egyaránt 3, az átlaga
a) 2; *b)* 3; *c)* 4!

a) Például: 0, 1, 3, 3, 3; *b)* például: 3, 3, 3, 3, 3; *c)* például: 3, 3, 3, 4, 7.

6. K2 Készítsünk olyan öt adatból álló adatsort, amelynek mediánja és átlaga egyaránt 3, a módusza
a) 2; *b)* 3; *c)* 4!

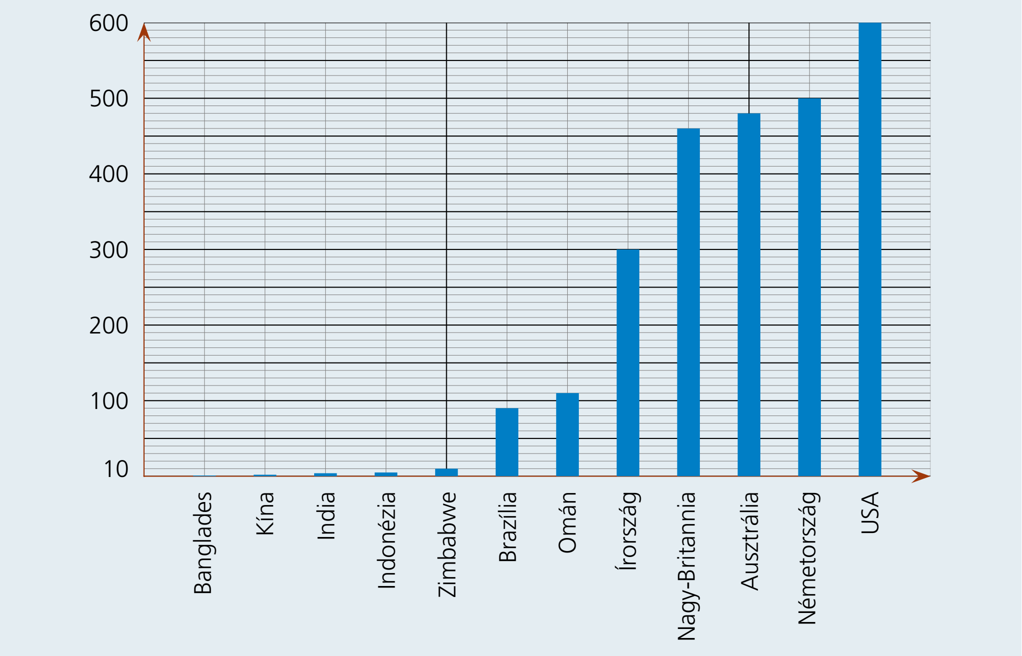
Ha adott a módusz és a medián, akkor az *a)* esetben 2, 2, 3 szerepel a számok között, a *c)* esetben 3, 4, 4. A *b)* esetben ennél kevesebbet tudunk.
a) Például: 2, 2, 3, 3,5, 4,5; *b)* például: 3, 3, 3, 3, 3; *c)* például: 1,5, 2,5, 3, 4, 4.

7. K2 Készítsünk olyan öt adatból álló adatsort, amelynek módusza és átlaga egyaránt 3, a mediánja
a) 2; *b)* 3; *c)* 4!

a) Ilyen adatsor nincs, mert ha a középső elem 2 és a módusz 3, akkor $a \leq b \leq 2 \leq 3 = 3$ lehet az öt szám. Ezek átlaga azonban kisebb, mint 3.
b) Például: 3, 3, 3, 3, 3.
c) Ilyen adatsor sincs, mert ha középső elem 4 és a módusz 3, akkor $3 = 3 \leq 4 \leq a \leq b$ lehet az öt szám. Ezek átlaga azonban nagyobb, mint 3.

2. Adatok szemléltetése

1. K1 *a)* Olvassuk le a grafikon adatait, és írjuk táblázatba őket!
2006-ban az 1000 főre jutó személygépkocsik száma az egyes országokban:

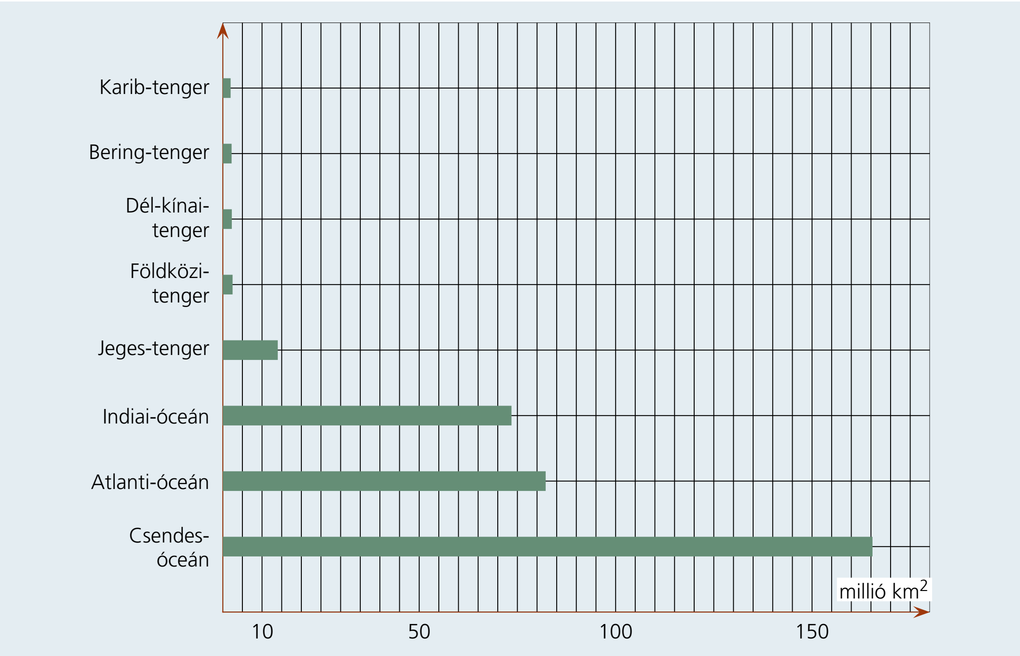


b) Mit gondolsz, Magyarországon hány személygépkocsi jut 1000 főre? Nézz utána az interneten!

a) Bangladesben	1
Kínában	2
Indiában	4
Indonéziában	5
Zimbabwéban	10
Brazíliában	90
Ománban	110
Írországban	300
Nagy-Britanniában	460
Ausztráliában	480
Németországban	500
az Egyesült Államokban	600

b) Magyarországon ez az érték körülbelül 200 lehet.

2. K1 *a)* Olvassuk le a grafikon adatait, rendezzük táblázatba őket!



b) Szemléltessük kördiagramon az arányokat!
c) Keressük meg, hogy a Balaton felszíne hány négyzetkilométer! Hány fokos középponti szöggel rajzolhatnánk a kördiagramra?

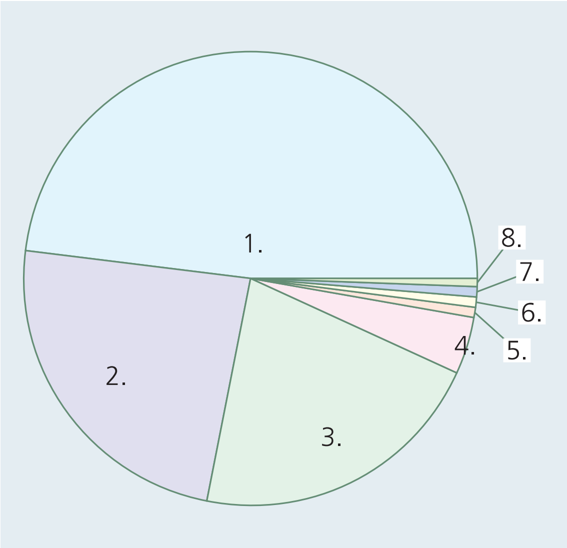
a) A grafikonról leolvasható értékek:

1. Csendes-óceán	165 000 000 km^2
2. Atlanti-óceán	82 000 000 km^2
3. Indiai-óceán	73 000 000 km^2
4. Jeges-tenger	14 000 000 km^2
5. Földközi-tenger	2 500 000 km^2
6. Dél-kínai-tenger	2 500 000 km^2
7. Bering-tenger	2 500 000 km^2
8. Karib-tenger	2 000 000 km^2

b) Millió négyzetkilométerben számolva az együttes terület 343,5.

Egymillió négyzetkilométerhez tartozó szög: $\frac{360^\circ}{343{,}5} \approx 1{,}05^\circ$.

c) Körülbelül 595 km^2. Ez a többi vízfelület arányában körülbelül $\frac{17}{10\,000\,000}$. A 360°-os körben nagyjából $0{,}0006^\circ = 2''$.

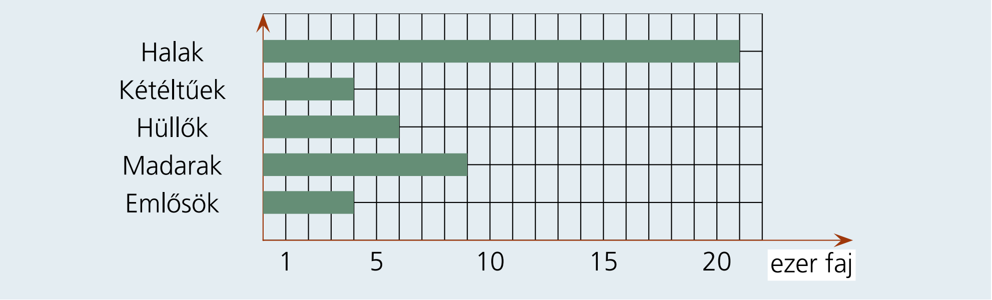


3. K1 A táblázatban a gerincesekre vonatkozó adatok szerepelnek!

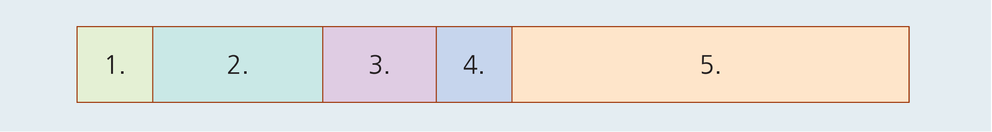
Emlősök	≈ 4000 faj
Madarak	≈ 9000 faj
Hüllők	≈ 6000 faj
Kétéltűek	≈ 4000 faj
Halak	≈ 21 000 faj

a) Szemléltessük az adatokat vonaldiagramon!
b) Szemléltessük a gerinces fajok megoszlási arányát szalagdiagramon!

a)



b)

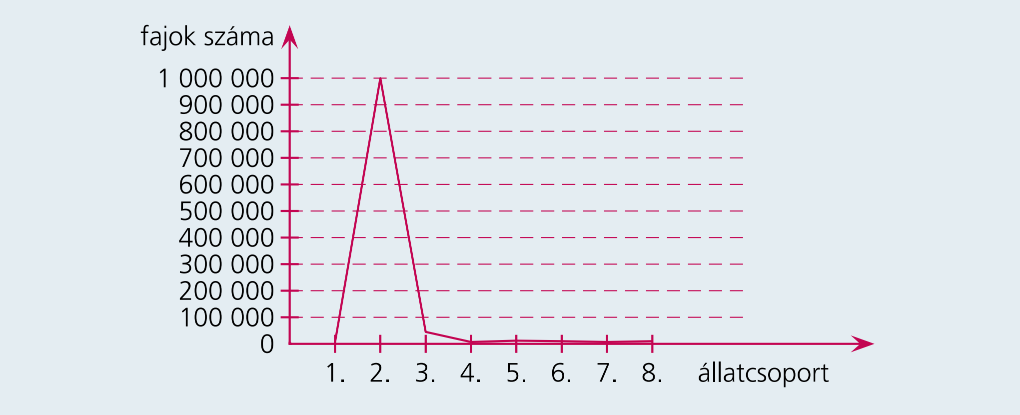


4. K1 A táblázatban a gerinctelenekre vonatkozó adatok szerepelnek!

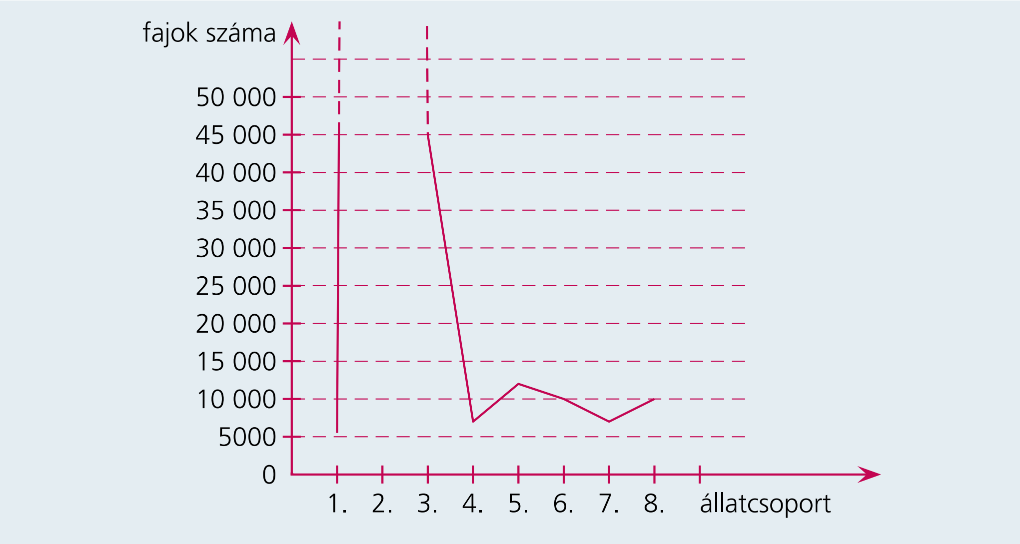
Tüskésbőrűek	≈ 5500 faj
Ízeltlábúak	több mint 1 000 000 faj
Puhatestűek	≈ 45 000 faj
Gyűrűsférgek	≈ 7000 faj
Hengeresférgek	≈ 12 000 faj
Laposférgek	≈ 10 000 faj
Csalánozók	≈ 7000 faj
Szivacsok	≈ 10 000 faj

a) Szemléltessük az adatokat vonaldiagramon!
b) Szemléltessük a gerinctelen fajok megoszlási arányát szalagdiagramon!

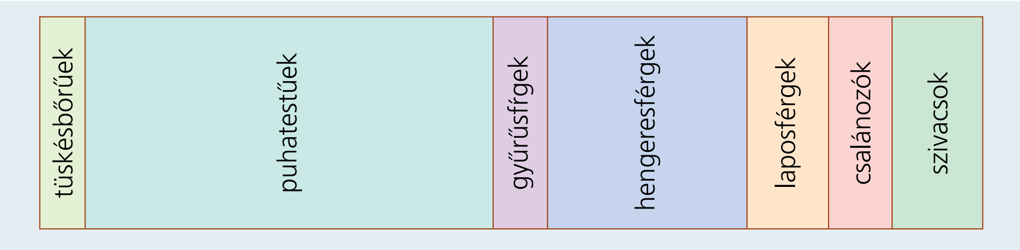
a) Ha arányosan szeretnénk szemléltetni az adatokat, akkor az ízeltlábúak nagy száma miatt a többi adatot nem lehet leolvasni:



Ha viszont a többi adatot szeretnénk precízebben leolvasni, akkor az ízeltlábúak pontos ábrázolásáról kell lemondanunk:



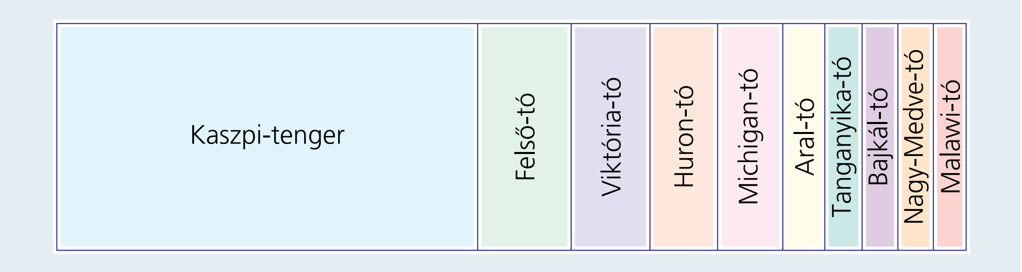
b) Az ízeltlábúak miatt ez a diagram nem lesz látványos és jól használható. Az ízeltlábúak nélkül a szalagdiagram így néz ki:



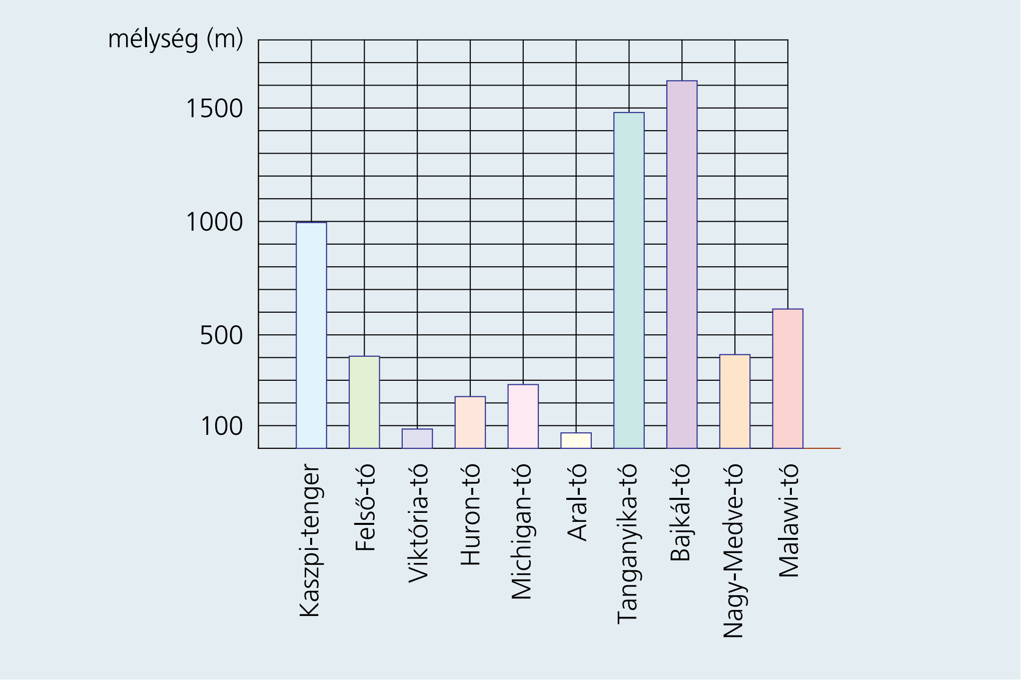
5. K2 Készítsünk többféle grafikont a következő adatok alapján!

A Föld tavai	Felszíne (km^2)	Mélysége (m)
Kaszpi-tenger	371 000	995
Felső-tó	82 400	406
Viktória-tó	69 500	85
Huron-tó	59 600	228
Michigan-tó	57 454	281
Aral-tó	37 000	68
Tanganyika-tó	32 900	1480
Bajkál-tó	31 500	1620
Nagy-Medve-tó	31 328	413
Malawi-tó	28 930	614

Például a tavak felszíne szalagdiagramon:



A mélységük oszlopdiagramon:



3. A kétarcú statisztika

1. K1 Keressünk újságban, interneten statisztikákat! Beszéljük meg az osztályban, hogy melyik mit jelent, miről szól! Döntsük el, hogy van-e benne megtévesztő grafika vagy adat!

2. K1 Készítsünk olyan súlyozást, amelyekre az 1, 2, 3, 4 sorrendben vett számok és a 2, 3, 6, 10 sorrendben vett számok súlyozott számtani közepe
a) az első esetben nagyobb; *b)* a második esetben nagyobb!

a) Ilyen nem lehet, mert a súlyok pozitívak, és a számok rendre nagyobbak a második esetben.
b) Sok megoldás van. Például: 10, 5, 2, 1.

3. K1 Készítsünk olyan súlyozást, amelyekre az 1, 2, 3, 4 sorrendben vett számok és a 10, 6, 3, 1 sorrendben vett számok súlyozott számtani közepe
a) az első esetben nagyobb;
b) a második esetben nagyobb;
c) egyenlő!

a) Sok megoldás van. Például: 1, 1, 1, 10.
b) Sok megoldás van. Például: 1, 1, 1, 1.
c) 1, 3, 1, 7.