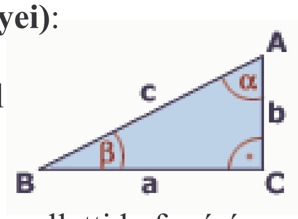
# 22. tétel:
# Szögfüggvények értelmezése a valós számhalmazon, ezek tulajdonságai, kapcsolatok ugyanazon szög szögfüggvényei között.

**Definíció derékszögű háromszögekre (hegyesszögek szögfüggvényei):**



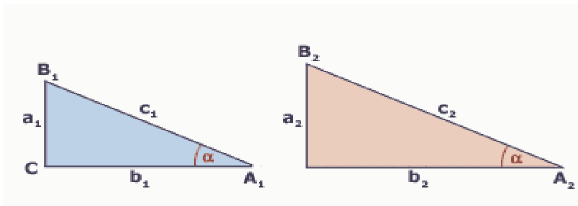

Egy hegyesszög ***szinusza*** egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

Egy hegyesszög ***koszinusza*** egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és az átfogó hányadosa. Azaz az ábra jelöléseit használva: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Egy hegyesszög ***tangense*** egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti és a szög melletti befogó hányadosa. Azaz az ábra jelöléseit használva: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

Egy hegyesszög ***kotangense*** egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hányadosa. Az ábra jelöléseit használva: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

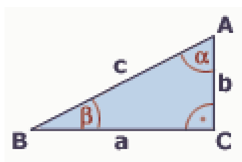
A definíció nem függ a háromszög választásától, mert az ilyen háromszögek hasonlók (két szög megegyezik), az oldalak aránya állandó.




Szögfüggvények tulajdonságai: (hegyesszögek esetén)

1. $0 < \sin\alpha < 1$
2. $0 < \cos\alpha < 1$
3. $0 < \mathrm{tg}\alpha$
4. $0 < \mathrm{ctg}\alpha$
5. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha$
6. $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
7. Visszakeresés:
   $\sin\alpha = 0{,}6$ számológép: $\alpha = \sin^{-1} 0{,}6$ $\quad \alpha = \arcsin 0{,}6$
8. Négyzetes összefüggés: mellékmegjegyzés: $\sin(\alpha^2) \neq (\sin\alpha)^2$
   $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \xrightarrow{\text{Pitagorasz-tétel}} \frac{c^2}{c^2} = 1$$

9. Pótszöges összefüggés: $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$




$$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei:

| | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Szögfüggvények általános definíciója:**

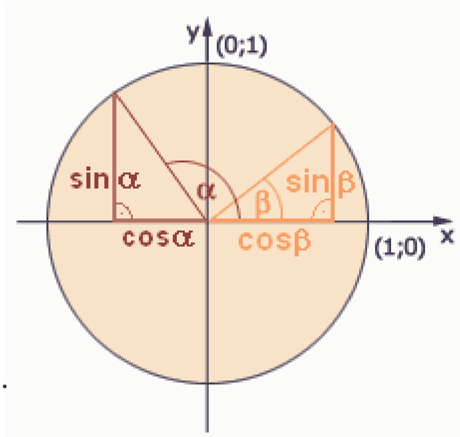
A koordinátasíkon az $\alpha$ szöggel elforgatott $\underline{i}$ egységvektor koordinátái: $\underline{v}(\cos\alpha;\sin\alpha)$

Továbbá:

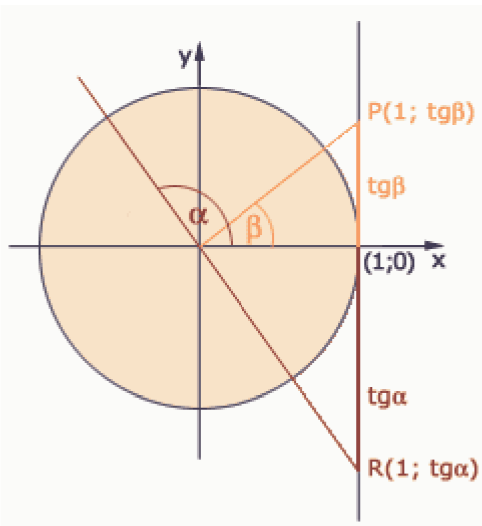
$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos\alpha\neq 0\Rightarrow\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad k\in Z$$

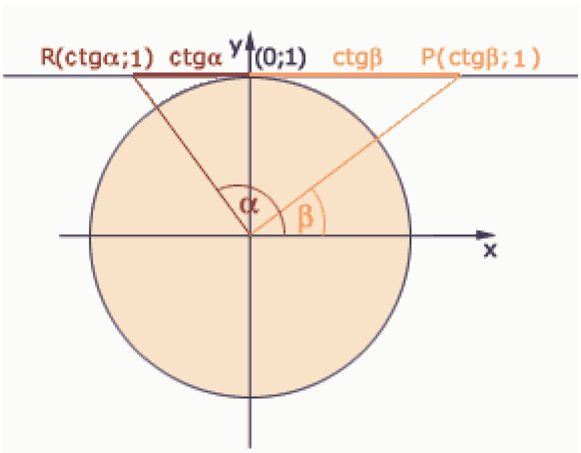
$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \sin\alpha\neq 0\Rightarrow\alpha\neq 0+l\pi \qquad l\in Z$$

A koszinusz és szinusz értékét leolvashatjuk az egységkörből.



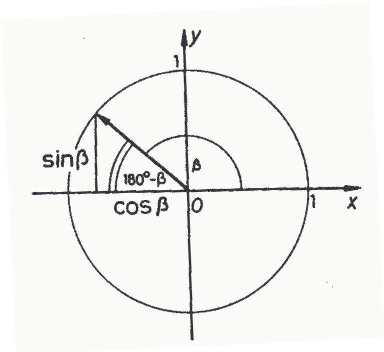

A tangens és kotangens értéke is leolvasható:
Az egységkör $(1;0)$ pontjába húzott érintő és az $\alpha$ szöggel elforgatott $\underline{i}$ egységvektor egyenesének metszéspontja $(1;\mathrm{tg}\alpha)$.
Az egységkör $(0;1)$ pontjába húzott érintő és az $\alpha$ szöggel elforgatott $\underline{i}$ egységvektor egyenesének metszéspontja $(\mathrm{ctg}\alpha;1)$.

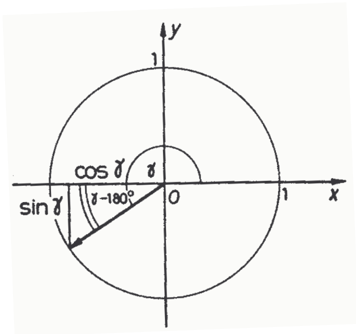


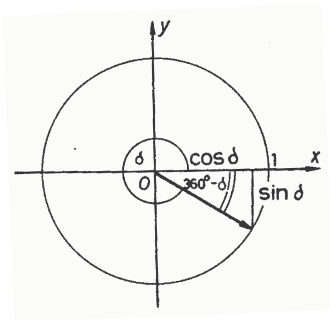



Ha az α szöggel elforgatott egységvektor a koordináta-rendszer az elsőtől különböző negyedében van, akkor az ott lévő szögek szögfüggvényértékeit visszavezethetjük a hegyesszögek szögfüggvényértékeire:

| $90° < \alpha < 180°$ | $180° < \alpha < 270°$ | $270° < \alpha < 360°$ |
|---|---|---|
| $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ | $\sin\alpha = -\sin(\alpha - 180°)$ | $\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$ |
| $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ | $\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$ | $\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$ |
| $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}(180° - \alpha)$ | $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha - 180°)$ | $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}(360° - \alpha)$ |
| $\mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$ | $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha - 180°)$ | $\mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{ctg}(360° - \alpha)$ |

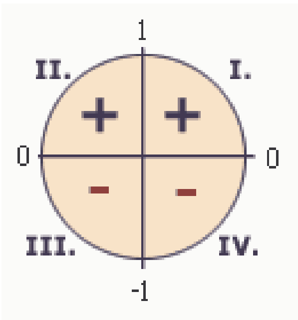


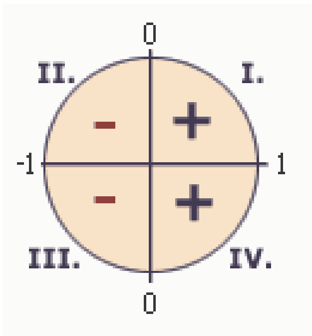




Előjelek a síknegyedekben:

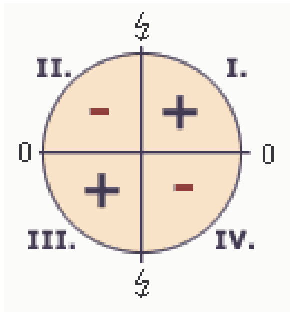
szinusz



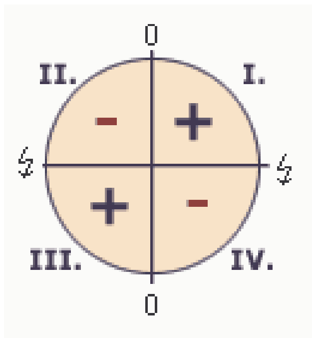

koszinusz




tangens




kotangens




360°-nál nagyobb szögek esetén visszavezetjük:

pl: $\sin(k \cdot 360° + m) = \sin m \qquad k \in Z \qquad 0° \le m < 360°$

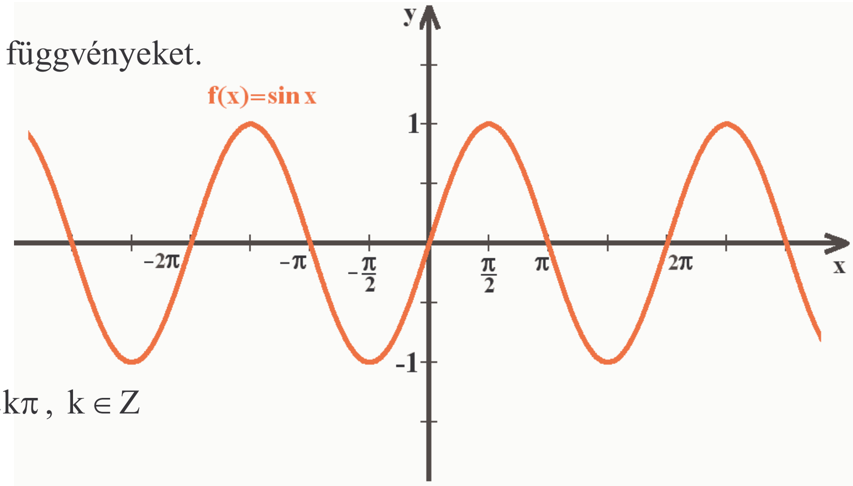
Negatív szögek esetén:

1. $\sin(-30°) = \sin(-30° + 360°) = \sin 330°$
2. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ páratlan függvény
   $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ páros függvény

Ilyen módon a trigonometrikus függvények periodikusak lesznek:

$\cos\alpha; \sin\alpha$ periódusa $2\pi$, $\mathrm{tg}\alpha; \mathrm{ctg}\alpha$ periódusa $\pi$

**Trigonometrikus függvények:**
Definiálhatjuk a trigonometrikus függvényeket.




$f(x) = \sin x$

$D_f = R$

$R_f = [-1;1]$

periodikus, periódusa: $2\pi$

páratlan: $\sin(-x) = -\sin x$

zérushelye: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k \in Z$

folytonos

monotonitás:

szig. mon. nő. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

szig mon. csökk. $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $k \in Z$

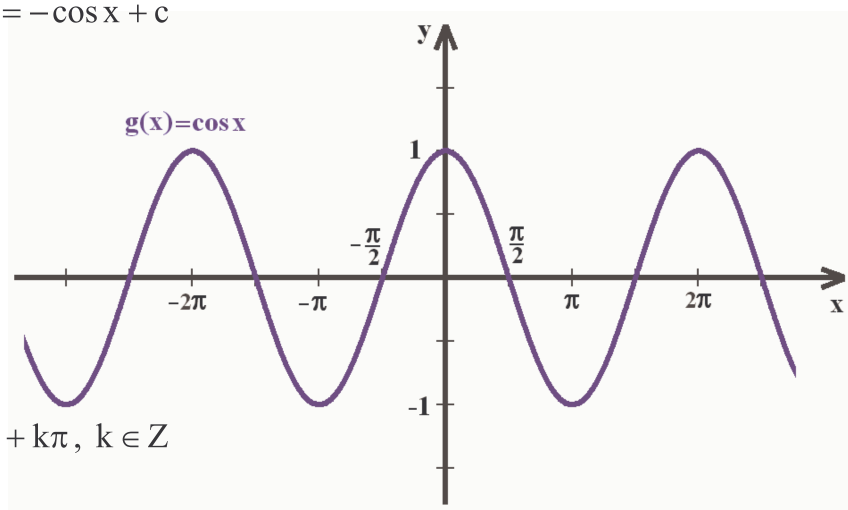
szélsőértékei:

globális maximum: helye: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ értéke: $y = 1$

globális minimum: helye: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ értéke: $y = -1$

deriváltja és primitívfüggvénye:

$(\sin x)' = \cos x$ $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$




$g(x) = \cos x$

$D_g = R$

$R_g = [-1;1]$

periodikus, periódusa: $2\pi$

páros: $\cos(-x) = \cos x$

zérushelye: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

folytonos

monotonitás:

szig. mon. nő. $x \in (-\pi + 2k\pi \,;\, 2k\pi)$

szig mon. csökk. $x \in (2k\pi \,;\, \pi + 2k\pi)$ $k \in Z$

szélsőértékei:

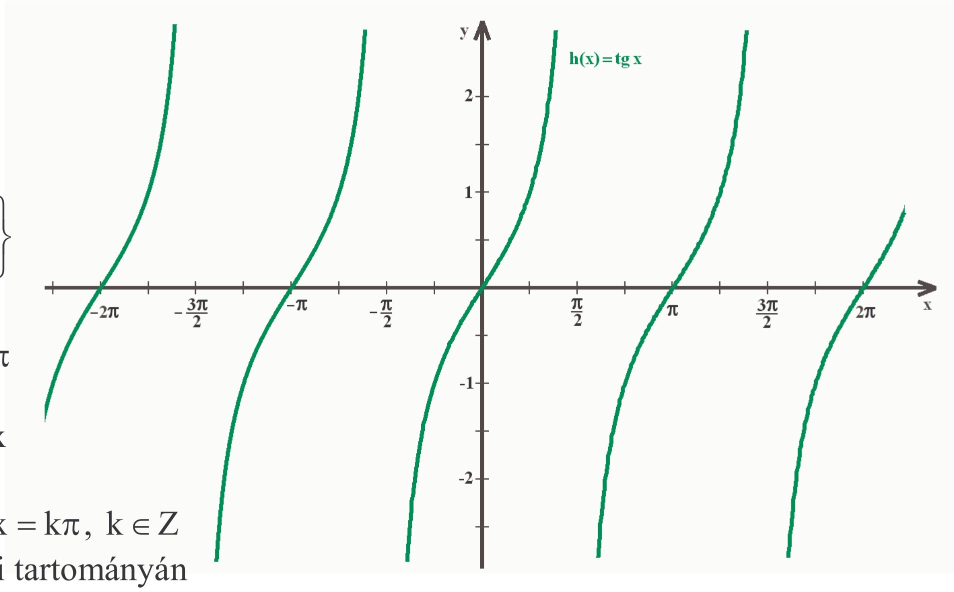
globális maximum: helye: $x = 2k\pi$, $k \in Z$ értéke: $y = 1$

globális minimum: helye: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$ értéke: $y = -1$

deriváltja és primitívfüggvénye:

$(\cos x)' = -\sin x$ $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$h(x) = \mathrm{tg}\, x$




$D_h = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in Z \right\}$

$R_h = R$

periodikus, periódusa: $\pi$

páratlan: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$

zérushelye: $\mathrm{tg}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in Z$

folytonos az értelmezési tartományán

monotonitás:

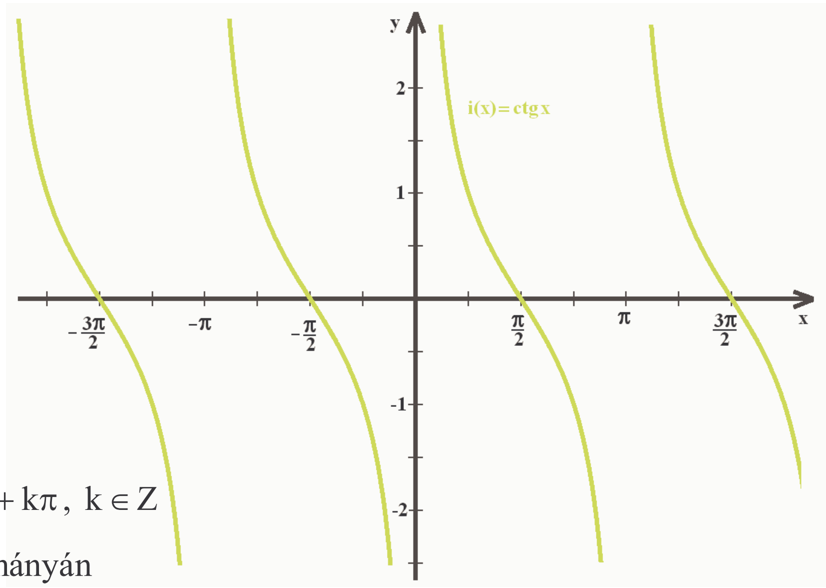
szig. mon. nő. periódusonként $x \in \left( -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ $k \in Z$

szélsőértékei nincsenek (nem korlátos sem alulról, sem felülről)

deriváltja és primitívfüggvénye:

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \mathrm{tg}\, x \, dx = \ln|\cos x| + c$$

$i(x) = \mathrm{ctg}\, x$




$D_i = R \setminus \{ k\pi ; k \in Z \}$

$R_i = R$

periodikus, periódusa: $\pi$

páratlan: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$

zérushelye: $\mathrm{ctg}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

folytonos az értelmezési tartományán

monotonitás:

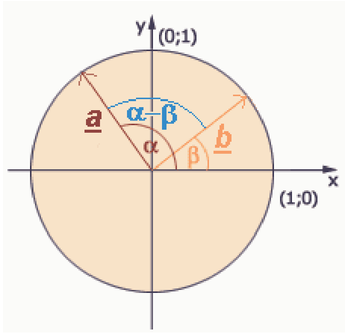
szig. mon. csökk. periódusonként $x \in (k\pi ; \pi + k\pi)$ $k \in Z$

szélsőértékei nincsenek (nem korlátos sem alulról, sem felülről)

deriváltja és primitívfüggvénye:

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \mathrm{ctg}\, x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

**Addíciós tételek:**




1. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

   Vegyünk fel két, $\alpha$ illetve $\beta$ szöggel elforgatott $\underline{i}$ egységvektort. A keletkezett két vektor koordinátái: $\underline{\boldsymbol{a}}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ és $\underline{\boldsymbol{b}}(\cos\beta;\sin\beta)$, közbezárt szögük $\alpha-\beta$.

   Ekkor a két vektor skaláris szorzatát kétféleképp kiszámolva:

   $\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}}=|\underline{\boldsymbol{a}}|\cdot|\underline{\boldsymbol{b}}|\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$ mivel $\underline{\boldsymbol{a}}$ és $\underline{\boldsymbol{b}}$ egységvektorok

   $\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ koordinátánként szorozva

   Tehát: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

   $$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))\overset{\text{1. miatt}}{=}\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)\overset{\text{cos fv ps; sin fv ptl}}{=}$$
   $$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

3. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

   $$\sin(\alpha+\beta)\overset{\text{pótszöges öf}}{=}\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\overset{\text{1. miatt}}{=}$$
   $$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta\overset{\text{pótszöges öf}}{=}\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

4. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

   $$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))\overset{\text{3. miatt}}{=}\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)\overset{\text{cos fv ps; sin fv ptl}}{=}$$
   $$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

5. $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$ $\quad\alpha;\ \beta;\ \alpha\pm\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi\quad k\in Z$

   $$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)\overset{\text{def}}{=}\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}\overset{\text{az eddigiek miatt}}{=}\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

   mivel $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$, ezért egyszerűsítsük a törtet ezzel

   $$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1\mp\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

6. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$ $\qquad \alpha;\ \beta;\ \alpha \pm \beta \neq k \cdot \pi \quad k \in Z$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) \overset{\text{def}}{=} \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} \overset{\text{az eddigiek miatt}}{=} \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta} =$$

mivel $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$, ezért egyszerűsítsük a törtet ezzel

$$= \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \mp 1}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \pm \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

**Kétszeres szögek szögfüggvényei:**

7. $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) \overset{2.\,\text{miatt}}{=} \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ a négyzetes összefüggésből

8. $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) \overset{3.\,\text{miatt}}{=} \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

9. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) \overset{5.\,\text{miatt}}{=} \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ $\qquad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad k \in Z$

10. $\operatorname{ctg}(2\alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha + \alpha) \overset{5.\,\text{miatt}}{=} \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha}$ $\qquad \alpha \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad k \in Z$

**Háromszoros szögek szögfüggvényei:**

11. $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) \overset{2.\,\text{miatt}}{=} \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \overset{7.,\,8.\,\text{miatt}}{=}$

$= (2\cos^2\alpha - 1) \cdot \cos\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \overset{\text{négyzetes öf}}{=}$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha \cdot (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha =$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

12. $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) \overset{3.\,\text{miatt}}{=} \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha \overset{7.,\,8.\,\text{miatt}}{=}$

$= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha \overset{\text{négyzetes öf}}{=}$

$= 2 \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$

$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

**Alkalmazások:**

- Matematika:
  - vektorok skaláris és vektoriális szorzata
  - vektorok felbontása (merőleges) komponensekre
  - terület és térfogatképletek
  - a háromszög oldalainak, szögeinek kiszámítása (koszinusz- ill. szinusztétel)
  - trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása:

    addíciós tételek segítségével vagy

    grafikusan a függvények segítségével

  - fázisos eltolás: $A, B \in R$ tetszőleges szám esetén

$$A \cdot \sin x + B \cdot \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos x \right) =$$

mivel $\left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$,

ezért létezik $\varepsilon$, hogy $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\varepsilon$ és $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\varepsilon$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot (\cos\varepsilon \cdot \sin x + \sin\varepsilon \cdot \cos x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(x + \varepsilon)$$

- Egyéb:
  - erők összegzése komponensekre való bontással
  - harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvénye
  - transzverzális hullámok
  - váltakozó feszültség
  - Schnellius-Descartes törvény: fénytörés
  - elektromágneses rezgések és hullámok
  - szív szinuszritmusa, hazugságvizsgálat