

Másodfokú egyenletrendszerek

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán!

$$\begin{aligned}x + y &= 7 \\ \underline{xy} &= \underline{-18}\end{aligned}$$

A behelyettesítő módszer a nyerő!

$$\begin{aligned}x + y &= 7 \rightarrow x = 7 - y \\ \underline{xy} &= \underline{-18} \\ (7 - y)y &= -18 \\ 7y - y^2 &= -18 \\ y^2 - 7y - 18 &= 0\end{aligned}$$

$$y_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= 9 & y_2 &= -2 \\ x_1 &= 7 - 9 = -2 & x_2 &= 7 - (-2) = 9\end{aligned}$$

Az egyenletrendszerek megoldásaként összetartozó számpárokat kell megadni!

Ha az egyenlet szimmetrikus a változók felcserélésére, akkor a megoldások is szimmetrikusak.

2. Oldja meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán!

$$\begin{aligned}x - y &= 7 \rightarrow x = 7 + y \\ \underline{xy} &= \underline{-18} \\ (7 + y)y &= -18 \\ 7y + y^2 &= -18 \quad | + 18 \\ y^2 + 7y + 18 &= 0\end{aligned}$$

$$y_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 72}}{2}$$

Mivel a négyzetgyök alatt negatív szám szerepel, nincs megoldás a valós számok halmazán.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán!

$$x - y = 8$$

$$\underline{xy = -15}$$

$$x - y = 8 \rightarrow x = 8 + y$$

$$\underline{xy = -15}$$

$$(8 + y)y = -15$$

$$8y + y^2 = -15$$

$$y^2 + 8y + 15 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 15}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} y_1 = -\frac{6}{2} = -3 \\ y_2 = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = 8 + y_1 = 5$$

$$x_2 = 8 + y_2 = 3$$

4. Mely valós számpárokra igaz a következő egyenletrendszer?

$$x - y - 3xy = -47$$

$$\underline{xy = 14}$$

x, y biztos nem 0, mert akkor a szorzatuk is 0 lenne. A második egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent!

$$x - y - 3xy = -47$$

$$\underline{xy = 14} \Rightarrow x = \frac{14}{y}$$

$$\frac{14}{y} - y - 3 \times \frac{14}{y} \times y = -47$$

$$\frac{14}{y} - y - 42 = -47$$

$$14 - y^2 = -5y$$

$$-y^2 + 5y + 14 = 0$$

$$y^2 - 5y - 14 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-14)}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{14}{y_1} = \frac{14}{2} = 7 \\ y_2 = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{14}{y_2} = \frac{14}{-2} = -7 \end{cases}$$

Második megoldás:

$$x - y - 3xy = -47$$

$$\underline{xy = 14}$$

$$x - y - 3 \times 14 = -47$$

$$\underline{xy = 14}$$

$$x - y = -5 \Rightarrow x = y - 5$$

$$\underline{(y - 5)y = 14}$$

$$y^2 - 5y - 14 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-14)}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{14}{y_1} = \frac{14}{2} = 7 \\ y_2 = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{14}{y_2} = \frac{14}{-2} = -7 \end{cases}$$

Gyakorló feladatok

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$$

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$$

$$\Downarrow x^2 = y \Rightarrow x^4 = y^2$$

$$y^2 - 26y + 25 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \times 25}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{50}{2} \\ y_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x_1^2 = 25 \quad x_2^2 = 1$$

$$x_1 = 5 \quad x_3 = 1$$

$$x_2 = -5 \quad x_4 = -1$$

2. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán! Ábrázolja koordináta rendszerben az egyenletrendszer megoldáshalmazát!

$$x^2 - y^2 = 81$$

$$\underline{x - y = 1}$$

$$x^2 - y^2 = 81$$

$$\underline{x - y = 1} \rightarrow x = 1 + y$$

$$(1 + y)^2 - y^2 = 81$$

$$1 + 2y + y^2 - y^2 = 81$$

$$2y = 80$$

$$y = 40$$

$$x = 1 + y = 41$$

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert a természetes számok halmazán!

$$x^2 + 4y^2 = 17$$

$$\underline{xy = 2}$$

$$x^2 + 4y^2 = 17$$

$$xy = 2 \rightarrow x = \frac{2}{y}$$

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + 4y^2 = 17$$

$$\frac{4}{y^2} + 4y^2 = 17$$

$$4 + 4y^4 = 17y^2$$

$$4y^4 - 17y^2 + 4 = 0$$

$$y^2 = z$$

$$y^4 = z^2$$

$$4z^2 - 17z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \times 16}}{2} = \frac{7 \pm 15}{2} = \begin{cases} \frac{1}{4} = 0,25 \\ 4 \end{cases}$$

$$y_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$y_2^2 = 4$$

$$y_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \quad y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y_2^2 = 4$$

$$y_3 = 2 \quad y_4 = -2$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{y^2} = 4$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{y^2} = -4$$

$$y_3 = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{y^2} = 1$$

$$y_4 = -2 \Rightarrow x_4 = -1$$

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert a természetes számok halmazán!

$$x - y + 2xy = 5$$

$$\underline{xy = 2}$$

$$x - y + 2xy = 5$$

$$xy = 2 \rightarrow x = \frac{2}{y}$$

$$\frac{2}{y} - y + 2 \times \frac{2}{y} \times y = 5 \quad | \times y$$

$$2 - y^2 + 4y = 5y$$

$$0 = y^2 + y - 2$$

$$y_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ y_2 = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{2}{y_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

5. Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$xy - 2y = 4$$

$$\underline{\frac{y}{x-2} = 1}$$

$$xy - 2y = 4 \quad x \neq 2$$

$$\underline{\frac{y}{x-2} = 1} \Rightarrow y = x - 2$$

$$x(x-2) - 2y = 4$$

$$x^2 - 2x - 2(x-2) = 4$$

$$x^2 - 2x - 2x + 4 = 4$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 0}}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$y_2 = x_2 - 2 = 0 - 2 = -2$$

6. Oldja meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán!

$$x^2 + y^2 + x + y = 14$$

$$\underline{xy = 3}$$

$$x^2 + y^2 + x + y = 14$$

$$\underline{xy = 3 \rightarrow y = \frac{3}{x}}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 6 + x + y = 14$$

$$(x + y)^2 - 6 + (x + y) = 14$$

$$(x + y)^2 + (x + y) - 20 = 0$$

$$a^2 + a - 20 = 0$$

$$a_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

$$x + y = 4 \quad x + y = -5$$

$$xy = 3 \quad \text{vagy} \quad \underline{xy = 3}$$

Már csak ezt a két egyenletrendszert kell megoldani!

7. Melyek azok az (x; y) valós számpárok, amelyekre

$$x + xy - y = 1$$

$$\underline{x^2y - xy^2 = -6}$$

$$x + xy - y = 1$$

$$x^2y - xy^2 = -6$$

$$\underbrace{xy}_{a}(\underbrace{x-y}_{b}) = -6$$

$$\underbrace{x-y}_{b} + \underbrace{xy}_{a} = 1$$

$$ab = -6$$

$$\underline{b + a = 1 \rightarrow a = 1 - b}$$

$$(1 - b)b = -6$$

$$b - b^2 = 6$$

$$0 = b^2 - b - 6$$

$$b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} b_1 = 3 \\ b_2 = -2 \end{cases}$$

$$a_1 = 1 - b_1 = 1 - 3 = -2$$

$$a_2 = 1 - b_2 = 1 - (-2) = 3$$

$$x - y = 3$$

$$x - y = -2$$

$$\underline{xy = -2}$$

$$\underline{xy = 3}$$

Már csak ezt a két egyenletrendszert kell megoldani!

8. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$x - xy + y = 1$$

$$\underline{xy = 20}$$

$$x - xy + y = 1$$

$$xy = 20 \rightarrow x = \frac{20}{y}$$

$$\frac{20}{y} - \frac{20}{y}y + y = 1 \quad | \times y$$

$$20 - 20y + y^2 = y$$

$$y^2 - 21y + 20 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 80}}{2} = \frac{21 \pm 19}{2} = \begin{cases} y_1 = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{20}{y_1} = 1 \\ y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{20}{y_2} = 20 \end{cases}$$

9. Mely valós számpárokra teljesül a következő egyenletrendszer?

$$x^2 + y^2 = 34$$

$$\underline{x - y = 2}$$

$$x^2 + y^2 = 34$$

$$\underline{x - y = 2} \Rightarrow x = 2 + y$$

$$(2 + y)^2 + y^2 = 34$$

$$4 + 4y + y^2 + y^2 = 34$$

$$2y^2 + 4y + 4 = 34 \quad | -34$$

$$2y^2 + 4y - 30 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{4} = \frac{-4 \pm 16}{4}$$

$$y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2 + y_1 = 2 + 3 = 5$$

$$y_2 = -5 \Rightarrow x_2 = 2 + (-5) = -3$$