2. A négyzetgyökvonás és azonosságai

1. K1 Végezzük el a gyökvonást, illetve a kijelölt műveletet!

a) $\sqrt{a^4b^{10}}$; *b)* $\sqrt{x^2y^4z^6q^8}$; *c)* $\sqrt{\frac{p^{12}q^{16}}{r^{10}s^8}}$; *d)* $\sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4}}:\sqrt{\frac{c^8d^{10}}{a^6b^2}}$.

a) $\sqrt{a^4b^{10}} = a^2|b^5|$;

b) $\sqrt{x^2y^4z^6q^8} = |x|y^2|z^3|q^4$;

c) $\sqrt{\frac{p^{12}q^{16}}{r^{10}s^8}} = \frac{p^6q^8}{|r^5|s^4}$;

d) $\sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4}}:\sqrt{\frac{c^8d^{10}}{a^6b^2}} = \sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4}\cdot\frac{a^6b^2}{c^8d^{10}}} = \sqrt{\frac{a^{10}b^8}{c^{10}d^{14}}} = \frac{|a^5|b^4}{|c^5||d^7|}$.

2. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; *b)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; *c)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$;

d) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$; *e)* $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; *f)* $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$;

b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125} = \sqrt{625} = 25$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$;

d) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = 3$;

e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$;

f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$.

3. K1 Melyik szám nagyobb?

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$ vagy 6; *b)* $\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$;

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ vagy 10; *d)* $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$ vagy $(\sqrt{2}+1)^2$.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6$.

b) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{40}$, $\sqrt{6}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{42}$, tehát $\sqrt{8}\cdot\sqrt{5} < \sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$,

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$. Melyik nagyobb $5+2\sqrt{6}$ vagy $10 \Rightarrow 2\sqrt{6}$ vagy 5. Mivel $2\sqrt{6}$ négyzete 24, az 5 négyzete 25, ezért $2\sqrt{6} < 5$, tehát $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 < 10$.

d) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = 5-1 = 4$, $(\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$. Mivel $2\sqrt{2} > 1$, ezért $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) < (\sqrt{2}+1)^2$.

4. K1 Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{2x-5}$; *b)* $\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$; *c)* $\sqrt{\frac{x-6}{3-2x}}$; *d)* $\frac{\sqrt{5x+4}}{x-2}$.

a) $2x-5 \geq 0$, $x \geq \frac{5}{2}$.

b) A négyzetgyök alatti tört számlálója minden x-re nemnegatív, így annak kell teljesülnie, hogy $1-x > 0$, azaz $x < 1$.

c) $\frac{x-6}{3-2x} \geq 0$. Két eset lehetséges:

1. $x-6 \geq 0$ és $3-2x > 0$, azaz $x \geq 6$ és $x < \frac{3}{2}$. Ilyen valós szám nincs.

2. $x-6 \leq 0$ és $3-2x < 0$, azaz $x \leq 6$ és $x > \frac{3}{2}$.

Tehát a kifejezés értelmezési tartománya: $\frac{3}{2} < x \leq 6$.

d) $5x+4 \geq 0$ és $x-2 \neq 0$. A kifejezés értelmezési tartománya: $x \geq -\frac{4}{5}$ és $x \neq 2$.

5. K2 Végezzük el a kijelölt műveletet

a) $(3\sqrt{2}-1)(4+2\sqrt{2})$; *b)* $(\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{2}$; *c)* $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+12\sqrt{6}$.

a) $(3\sqrt{2}-1)(4+2\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}+6\cdot 2-4-2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}+8$.
b) $(\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{16}+12\cdot 2-4\sqrt{36} = 4\cdot 4+24-4\cdot 6 = 16+24-24 = 16$.
c) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+12\sqrt{6} = 18+12-12\sqrt{6}+12\sqrt{6} = 30$.

6. K2-E1 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{7}}$;
b) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$;
c) $\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^2$;
d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2$.

a) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})} = \sqrt{64-63} = 1$.
b) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}} = \sqrt{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$.
c) $\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^2 = 8+3\sqrt{7}+8-3\sqrt{7}-2\sqrt{(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})} =$
$= 16-2\sqrt{64-63} = 16-2 = 14$.
d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2 = a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}-2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-1})\cdot(a-\sqrt{a^2-1})} =$
$= 2a-2\sqrt{a^2-(a^2-1)} = 2a-2$.

3. A négyzetgyökvonás alkalmazásai

1. K1 A következő feladatokban a négyzetgyökök alatt szereplő betűk mindegyike pozitív. Végezzük el a négyzetgyökvonást (amit lehet, vigyünk ki a négyzetgyökjel alól)!

a) $\sqrt{75a^7b^8c^{19}}$; *b)* $\sqrt{\frac{18x^{13}y^6}{50p^9q^{11}}}$; *c)* $\sqrt{a^4b^2-b^4a^2}$.

a) $\sqrt{75a^7b^8c^{19}} = \sqrt{25\cdot 3\cdot a^6\cdot a\cdot b^8\cdot c^{18}\cdot c} = 5a^3b^4c^9\cdot\sqrt{3ac}$.
b) $\sqrt{\frac{18x^{13}y^6}{50p^9q^{11}}} = \sqrt{\frac{9x^{13}y^6}{25p^9q^{11}}} = \frac{3x^6y^3\sqrt{x}}{5p^4q^5\sqrt{pq}}$.
c) $\sqrt{a^4b^2-b^4a^2} = \sqrt{a^2b^2(a^2-b^2)} = ab\sqrt{a^2-b^2}$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a nemnegatív valós számok halmazán!
$6\sqrt{9x}+5\sqrt{x}-2\sqrt{25x} = 26$.

Az egyenlet bal oldala így alakítható:
$6\sqrt{9x}+5\sqrt{x}-2\sqrt{25x} = 6\cdot 3\cdot\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2\cdot 5\cdot\sqrt{x} = 18\sqrt{x}+5\sqrt{x}-10\sqrt{x} = 13\sqrt{x}$.
Tehát
$13\sqrt{x} = 26$, azaz $\sqrt{x} = 2$, ahonnan $x = 4$.

3. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(\sqrt{3}+4\sqrt{27}-\sqrt{75})\cdot 2\sqrt{12}$;

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{20})(2\sqrt{5}-\sqrt{45})$;

c) $(\sqrt{500}+\sqrt{125})(2\sqrt{75}-5\sqrt{3})$.

a) $(\sqrt{3}+4\sqrt{27}-\sqrt{75})\cdot 2\sqrt{12}=(\sqrt{3}+4\cdot 3\sqrt{3}-5\sqrt{3})\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=32\cdot 3=96$.

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{20})(2\sqrt{5}-\sqrt{45})=(\sqrt{5}+2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-3\sqrt{5})=3\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5})=-15$.

c) $(\sqrt{500}+\sqrt{125})(2\sqrt{75}-5\sqrt{3})=(10\sqrt{5}+5\sqrt{5})(10\sqrt{3}-5\sqrt{3})=15\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{3}=75\sqrt{15}$.

4. K1 Melyik szám nagyobb: *A* vagy *B*?

a) $A=5\sqrt{2}$, $B=2\sqrt{5}$;

b) $A=\sqrt{54-6\sqrt{24}}$, $B=3\sqrt{6}-2$;

c) $A=\sqrt{49+4\sqrt{12}}$, $B=4\sqrt{3}+1$.

a) $A=5\sqrt{2}=\sqrt{50}$, $B=2\sqrt{5}=\sqrt{20}$, tehát $A>B$.

b) Mindkét szám pozitív, így az a nagyobb, amelyiknek a négyzete nagyobb.

$A^2=54-6\sqrt{24}=54-12\sqrt{6}$,

$B^2=(3\sqrt{6}-2)^2=54+4-12\sqrt{6}=58-12\sqrt{6}$.

Mivel $B^2>A^2$, ezért $B>A$.

c) Most is a két szám négyzetét hasonlítjuk össze.

$A^2=49+4\sqrt{12}=49+8\sqrt{3}$,

$B^2=(4\sqrt{3}+1)^2=48+1+8\sqrt{3}=49+8\sqrt{3}$.

Tehát $A=B$.

5. K2 Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét ($a>0$, $b>0$)!

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; *b)* $\frac{15}{\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{a}{\sqrt{a}}$; *d)* $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$;

e) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$; *f)* $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$; *g)* $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$; *h)* $\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$.

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

b) $\frac{15}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}$.

c) $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$.

d) $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{b\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{ab}}{ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$.

e) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{12}}{2}\left(=\frac{5\cdot 2\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\right)$.

f) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{7-1}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$.

g) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}=\frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

h) $\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}=\frac{(a-\sqrt{a})^2}{(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})}=\frac{a^2+a-2a\sqrt{a}}{a^2-a}=\frac{a+1-2\sqrt{a}}{a-1}$.

6. E1 Döntsük el, hogy az alábbi kifejezés milyen előjelű!
$\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}$.

Legyen
$A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}>0$ és $B=2\sqrt{3}>0$.
Ha $A>B$, akkor a kifejezés pozitív, ellenkező esetben negatív. A két szám négyzetét hasonlítjuk össze:
$A^2=7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}-2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=14-2\sqrt{49-48}=14-2=12$,
$B^2=(2\sqrt{3})^2=4\cdot 3=12$.
Tehát a megadott kifejezés értéke 0.

4. Az n-edik gyök fogalma és azonosságai

1. K1 Végezzük el az alábbi gyökvonásokat:
a) $\sqrt[3]{64}$; *b)* $\sqrt[4]{625}$; *c)* $\sqrt[5]{\frac{1}{-32}}$; *d)* $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$; *e)* $\sqrt[10]{1024}$; *f)* $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

a) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$.
b) $\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$.
c) $\sqrt[5]{\frac{1}{-32}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$.
d) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^3}=\frac{3}{10}$.
e) $\sqrt[10]{1024}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$.
f) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{1}{2}$.

2. K1 Végezzük el az alábbi gyökvonásokat (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív):
a) $\sqrt[3]{a^6b^{12}}$; *b)* $\sqrt[7]{x^{21}y^{42}z^{14}}$; *c)* $\sqrt[4]{\frac{p^8q^{12}}{r^{20}s^4}}$; *d)* $\sqrt[5]{\frac{k^{25}m^{20}}{32l^{40}}}$.

a) $\sqrt[3]{a^6b^{12}}=\sqrt{(a^2)^3(b^4)^3}=a^2b^4$.
b) $\sqrt[7]{x^{21}y^{42}z^{14}}=\sqrt[7]{(x^3)^7(y^6)^7(z^2)^7}=x^3y^6z^2$.
c) $\sqrt[4]{\frac{p^8q^{12}}{r^{20}s^4}}=\frac{p^2q^3}{r^5s}$.
d) $\sqrt[5]{\frac{k^{25}m^{20}}{32l^{40}}}=\frac{k^5m^4}{2l^8}$.

3. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív):
a) $\sqrt[3]{4^4\cdot 5^{10}}\cdot\sqrt[3]{4^2\cdot 5^5}$; *b)* $\sqrt[5]{a^3b^8c^{12}}\cdot\sqrt[5]{a^7b^{12}c^3}$; *c)* $\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}}:\sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}$.

a) $\sqrt[3]{4^4\cdot 5^{10}}\cdot\sqrt[3]{4^2\cdot 5^5}=\sqrt[3]{4^4\cdot 5^{10}\cdot 4^2\cdot 5^5}=\sqrt[3]{4^6\cdot 5^{15}}=4^2\cdot 5^5$.
b) $\sqrt[5]{a^3b^8c^{12}}\cdot\sqrt[5]{a^7b^{12}c^3}=\sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{15}}=a^2b^4c^3$.
c) $\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}}:\sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}=\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}\cdot\frac{x}{y^3}}=\sqrt[4]{\frac{x^8}{y^8}}=\frac{x^2}{y^2}$.