Másodfokú egyenlőtlenségek

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$x^2 - x - 6 < 0$

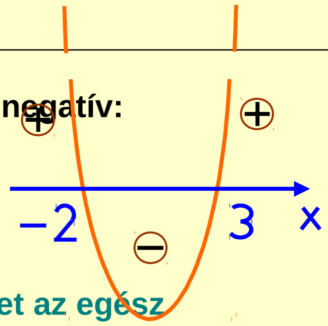
A legkönnyebb félig grafikusan megoldani. Fogalmazzuk át a feladatot!
Hol negatív az f(x) = x^2 – x – 6 függvény értéke?
A főegyüttható pozitív (a = 1 > 0) ezért a parabola felfelé nyílik. Keressük meg a zérushelyét, és vázoljuk a függvény grafikonját!

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

A függvény értéke a két zérushely között negatív:

$\boxed{-2 < x < 3}$ ( ]-2 ;3[ )



2. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

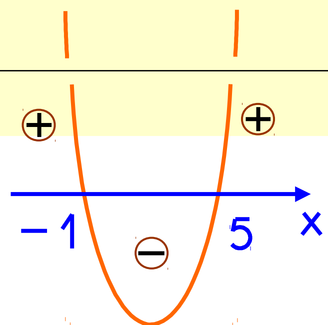
$x^2 - 4x - 5 \geq 0$

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

$$x_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$



$\boxed{x \leq -1 \;\vee\; x \geq 5}$ $\qquad\qquad$ $(\;]-\infty;-1]\;\cup\;[5;\infty[\;)$

3. **Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!**

$$(2-3x)-(x-1)<-4-(x-2)^2$$

Előbb rendezzük az egyenlőtlenséget!

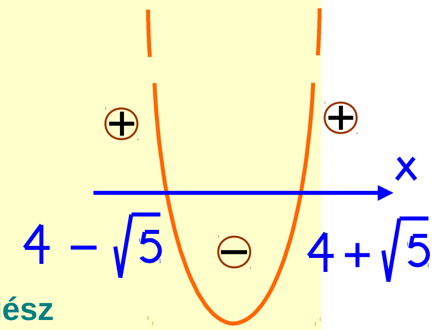
$$(2-3x)-(x-1)<-4-\underbrace{(x-2)^2}_{(x^2-4x+4)}$$

$$2-3x-x+1<-4-x^2+4x-4$$

$$3-4x<-8-x^2+4x$$

$$x^2-8x+11<0$$

$$x_{1;2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\times 11}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{8\pm 2\sqrt{5}}{2}=4\pm\sqrt{5}$$

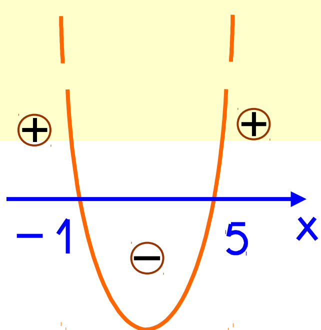


$$\boxed{4-\sqrt{5}<x<4+\sqrt{5}}$$

4. **Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!**

$$\frac{2}{x^2-4x-5}\leq 0$$

A számláló pozitív szám. A tört értéke akkor lesz negatív, ha a nevező értéke negatív ($\frac{(+)}{(-)}$).



$$x^2-4x-5<0 \qquad \left(x^2-4x-5\neq 0!\right)$$

$$x_{1;2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{10}{2}=5 \\ x_2=-\frac{2}{2}=-1 \end{cases} \qquad \boxed{-1< x<5}$$

Az egyenlőtlenség egész megoldásai: 0; 1; 2; 3; 4

5. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

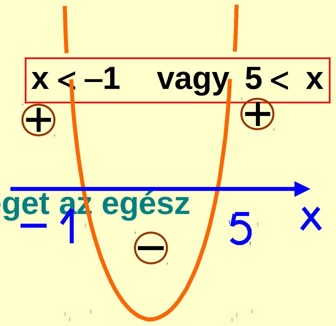
$$\frac{-2}{x^2-4x-5}\leq 0$$

A számláló negatív szám. A tört értéke akkor lesz negatív, ha a nevező értéke pozitív ($\frac{(-)}{(+)}$).

$$x^2-4x-5>0 \qquad \left(x^2-4x-5\neq 0!\right.$$

$$x_{1;2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{10}{2}=5 \\ x_2=-\frac{2}{2}=-1 \end{cases}$$

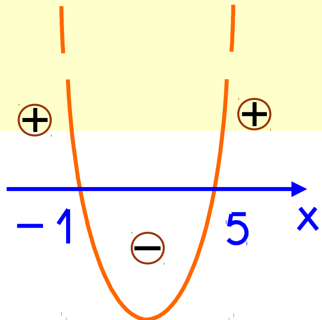
$$\boxed{x<-1 \quad \text{vagy} \quad 5<x}$$



6. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

$$\frac{2}{x^2-4x-5}\geq 0$$

A számláló pozitív szám. A tört értéke akkor lesz pozitív, ha a nevező értéke pozitív ($\frac{(+)}{(+)}$).



$$x^2 - 4x - 5 > 0 \qquad \left(x^2 - 4x - 5 \neq 0!\right)$$

$$x_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{x < -1 \quad \text{vagy} \quad 5 < x}$$

Az egyenlőtlenség egész megoldásai: 0; 1; 2; 3; 4

7. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

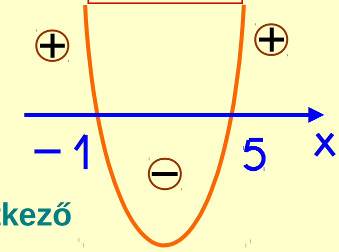
$$\frac{-2}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$$

A számláló negatív szám. A tört értéke akkor lesz pozitív, ha a nevező értéke negatív ($\frac{(-)}{(-)}$).

$$x^2 - 4x - 5 < 0 \qquad \left(x^2 - 4x - 5 \neq 0!\right)$$

$$x_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{-1 < x < 5}$$



8. Mely valós *x* értékekre teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 12x + 20} < 0$$

I. megodás:

1. eset: $\frac{(+)}{(-)}$

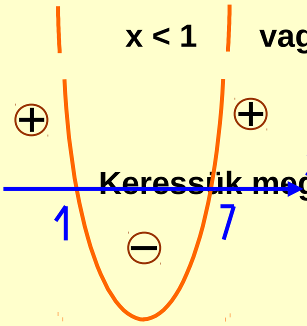
$x^2 - 8x + 7 > 0$ **és** $x^2 - 12x + 20 < 0$

$$x^2 - 8x + 7 > 0$$

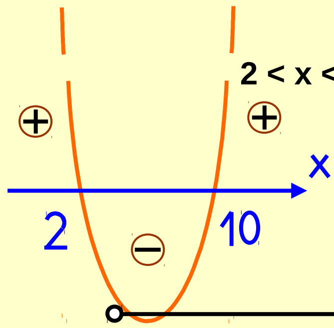
$$x_{1;2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 20 < 0$$

$$x_{1;2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

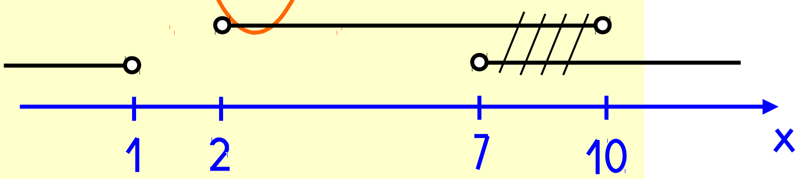


$x < 1$ vagy $7 < x$



$2 < x < 10$

Keressük meg a közös részt!

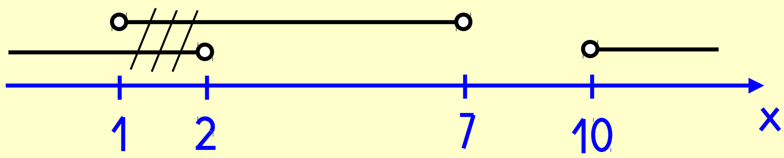


$$\boxed{7 < x < 10}$$

2. eset: $\frac{(-)}{(+)}$

$x^2 - 8x + 7 < 0$ és $x^2 - 12x + 20 > 0$

$1 < x < 7$ és $x < 2$ vagy $10 < x$



$$\boxed{1 < x < 2}$$

II. megoldás:

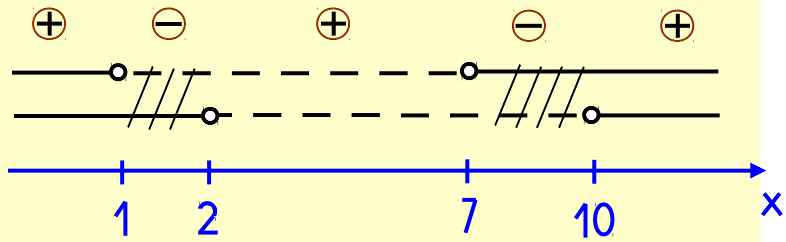
Megkeressük a zérushelyeket és ábrázoljuk a függvényértékek előjelét számegyenesen!

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



9. Mely valós *x* értékekre teljesül a következő egyenlőtlenség? Mely pozitív *x* helyeken teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{2x^2 - 6x - 36}{2 - x - x^2} \le 0$$

I. megodás:

1. eset: $\frac{(+)}{(-)}$

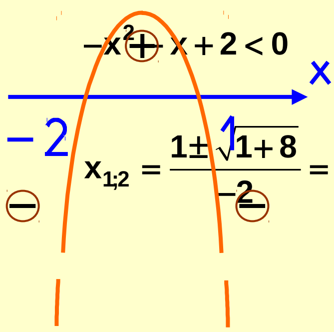
$2x^2 - 6x - 36 \ge 0$ **és** $-x^2 - x + 2 < 0$

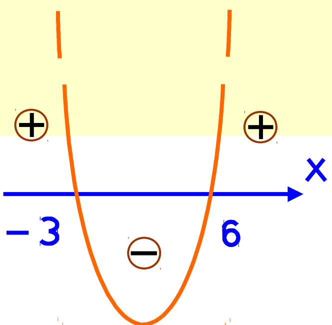
$$2x^2 - 6x - 36 > 0$$

$$x_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+288}}{4} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

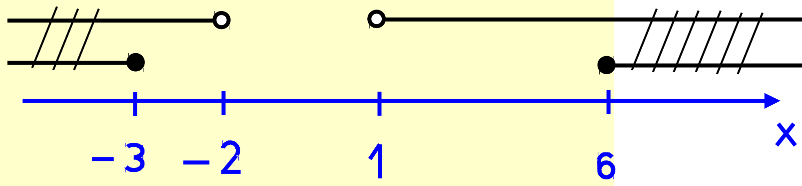
$$-x^2 + x + 2 < 0$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$





$x \leqq -3$ vagy $6 \leqq x$ $\qquad$ $x < -2$ vagy $1 < x$



$\boxed{x \leq -3 \text{ vagy } 6 \leq x}$

A pozitív megoldások: $6 \leqq x$

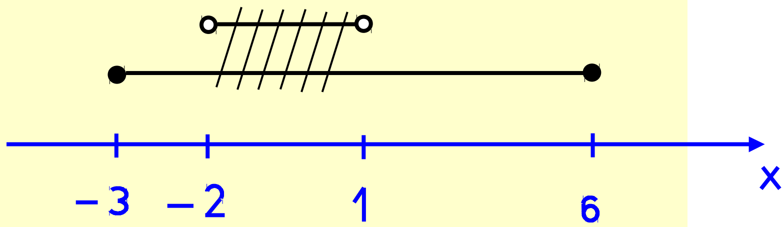
2. eset: $\dfrac{(-)}{(+)}$

$2x^2 - 6x - 36 \leqq 0$ $\qquad$ és

$-x^2 - x + 2 > 0$

$-3 \leqq x \leqq 6$

$-2 < x < 1$



$\boxed{-2 < x < 1}$

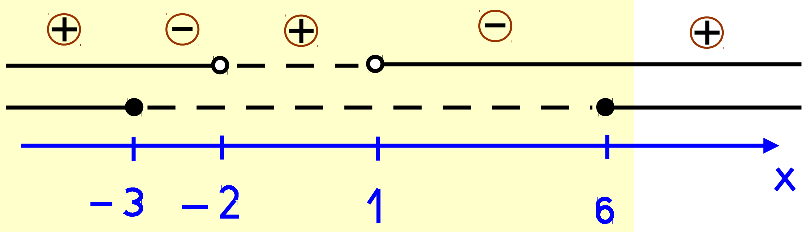
A pozitív megoldások: $0 \leqq x < 1$

II. megoldás:

$2x^2 - 6x - 36 = 0$ $\qquad$ $-x^2 - x + 2 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{4} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$\boxed{x \le -3 \text{ vagy } 6 \le x}$ vagy $\boxed{-2 < x < 1}$

10. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a negatív számok halmazán!

$$\frac{x-4}{6-5x-x^2} > 0$$

1. eset $\frac{(+)}{(+)}$

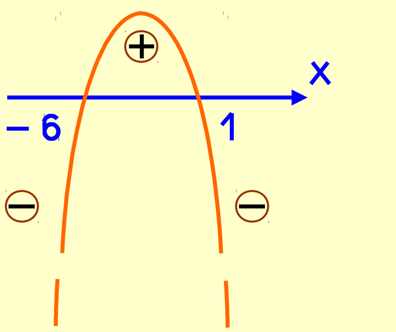
$x - 4 > 0$

$x > 4$

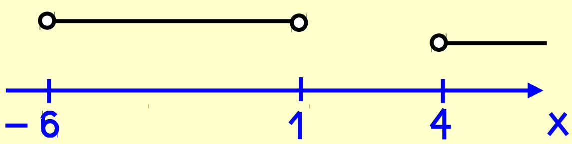
és

$-x^2 - 5x + 6 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{5 \pm 7}{-2} = \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$-6 < x < 1$

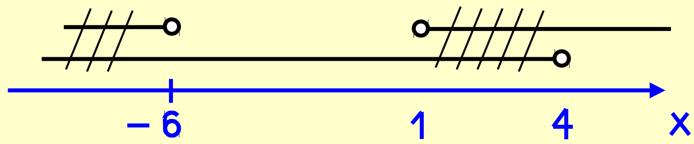


Nincs közös rész.

2. eset $\frac{(-)}{(-)}$

$x - 4 < 0$ és $-x^2 - 5x + 6 < 0$

$x < 4$ $x < -6$ vagy $1 < x$



$\boxed{x < -6}$ vagy $\boxed{1 < x < 4}$

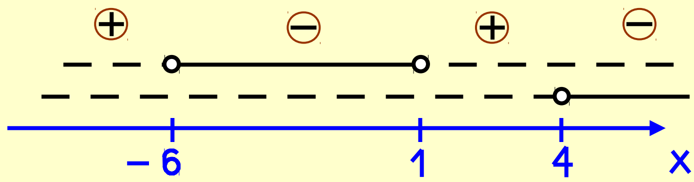
A negatív számok halmazára a megoldás $x < -6$.

II. megoldás:

$x - 4 < 0$

$$-x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{5 \pm 7}{-2} = \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$\boxed{x < -6}$ vagy $\boxed{1 < x < 4}$

A negatív számok halmazára a megoldás $x < -6$.

11. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x-3} \geq 1$$

$$\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-3}\geq 1$$

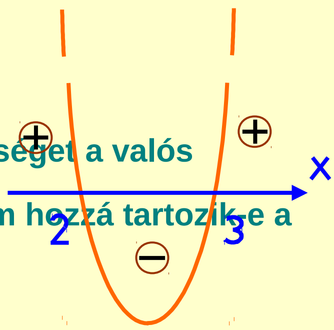
$$\frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)}-\frac{2(x-2)}{(x-2)(x-3)}-1\geq 0$$

$$\frac{x^2-3x-2x+4-x^2+5x-6}{(x-2)(x-3)}\geq 0$$

$$\frac{-2}{(x-2)(x-3)}\geq 0$$

$$-2<0\Rightarrow (x-2)(x-3)<0$$

$$\boxed{2<x<3}$$



12. **Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! A $\left[-3;\frac{11}{2}\right]$ intervallum hozzá tartozik-e a megoldáshalmazhoz?**

$$\frac{x^2-25}{x^2-9x+18}\leq 0$$

I. megoldás:

1. eset: $\frac{(-)}{(+)}$

$x^2-25\leq 0$

$x^2\leq 25$

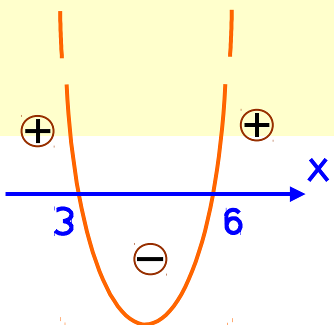
$|x|\leq 5$

$-5\leq x\leq 5$

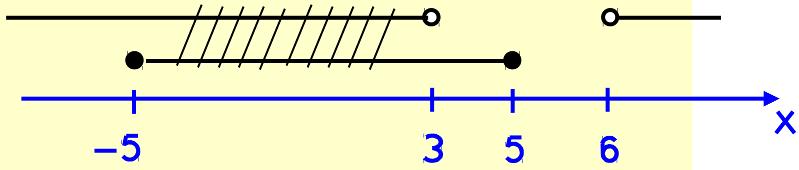
és

$x^2-9x+18>0$

$$x_{1;2}=\frac{9\pm\sqrt{81-4\times 1\times 18}}{2}=\begin{cases}x_1=6\\x_2=3\end{cases}$$



$x < 3$ vagy $6 < x$



$\boxed{-5 \le x < 3}$

2. eset: $\dfrac{(+)}{(-)}$

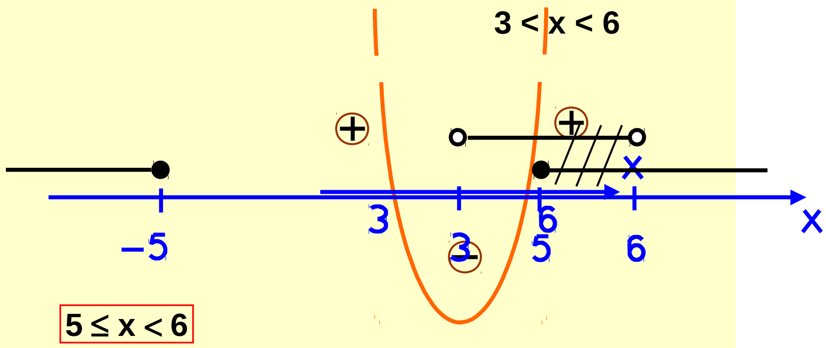
$x^2 - 25 \ge 0$ és $x^2 - 9x + 18 < 0$

$x^2 \ge 25$

$|x| \ge 5$

$x \le -5$ vagy $x \ge 5$

$3 < x < 6$



$\boxed{5 \le x < 6}$

A $\left[-3; \dfrac{11}{2}\right]$ intervallum nem tartozik hozzá a megoldáshalmazhoz.

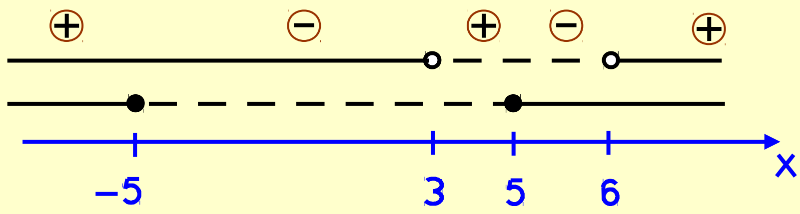
II. megoldás:

$x^2 - 25 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 9x + 18 = 0$

$x^2 = 25$

$|x| = 5$ $\qquad$ $x_{1;2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 1 \times 18}}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$x = \pm 5$



$\boxed{-5 \le x < 3}$ vagy $\boxed{5 \le x < 6}$

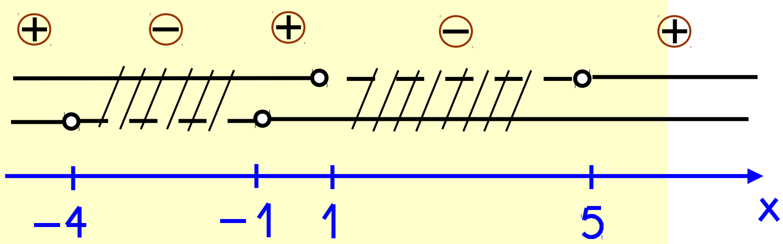
A $\left[-3; \frac{11}{2}\right]$ intervallum nem tartozik hozzá a megoldáshalmazhoz.

13. Mi a következő egyenlőtlenség valós megoldáshalmazának és a [–2; 3] intervallumnak a közös része?
Mi az egyenlőtlenség megoldása az egész számok halmazán?

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-6x+5}<0$$

$x^2+5x+4=0$ $\qquad$ $x^2-6x+5=0$

$x_{1;2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-4\end{cases}$ $\qquad$ $x_{1;2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\begin{cases}x_1=5\\x_2=1\end{cases}$



$\boxed{-4<x<-1}$ vagy $\boxed{1<x<5}$

A megoldás közös része a [–2; 3] intervallummal:

$\boxed{-2\le x<-1}$ $\qquad$ $\boxed{1<x\le 3}$

Az egész számok halmazán a megoldás: –3; –2; 2; 3; 4